Épreuve de mathématiques II
Correction

A. Une propriété de Perron- Frobenius

1. Rappelons d'abord la formule générale pour une matrice $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$:

$$^tXAX = (AX|X) = \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j}x_ix_j.$$

Ici, et en utilisant l'indication, on a

$$^tXH_nX = \sum_{0\leq i,j\leq n-1} x_ix_j \int_0^1 t^{i+j}\mathrm{d}t.$$

Utilisant la linéarité de l'intégrale et reconnaissant un carré, on obtient :

$$^tXH_nX = \int_0^1 \sum_{0\leq i,j\leq n-1} x_ix_jt^{i+j}\mathrm{d}t = \int_0^1 \left(\sum_{i=0}^{n-1} x_it^i\right)^2 \mathrm{d}t.$$

De la formule précédente, on déduit immédiatement que H_n est positive. Démontrons qu'elle est définie positive. En effet, si $^tXH_nX = 0$, alors, puisqu'on intègre une fonction continue et positive sur $[0, 1]$ dont l'intégrale doit être nulle, on déduit que

$$\forall t \in [0, 1], \sum_{i=0}^{n-1} x_it^i = 0.$$

Un polynôme ayant une infinité de racine étant le polynôme nul, on en déduit que tous les x_i sont nuls, soit encore que X est nul. Ainsi, H_n est définie positive.

2. Soit X un vecteur de $\mathscr{V}$. Donc $H_nX = \rho_nX$ puis

$$^tXH_nX = \rho_n^tXX = \rho_n\|X\|^2.$$

Réciproquement, H_n étant symétrique à coefficients réels. Le cour indique (théorème spectral) qu'il existe une matrice diagonale $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice orthogonale P de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$H_n = PD^tP.$$

Notons $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_{n-1}$ les valeurs propres de H_n de telle sorte que $D = \mathrm{diag}(\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_{n-1})$. Soit maintenant X un élément non nul de $\mathbb{R}^n$ vérifiant $^tXH_nX = \rho_n\|X\|^2$. Posons

$$Y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = {}^tPX = P^{-1}X,$$

on a :

$$^tXH_nX = (PY|PD^tPPY) = (Y|DY)$$

et

$$\|X\|^2 = (X|X) = (PY|PY) = (Y|^tPPY) = \|Y\|^2.$$

Or ${}^tXH_nX = \rho_n\|X\|^2$ donc ${}^tYD_nY = \rho_n\|Y\|^2$. Ainsi $\sum_{k=0}^{n-1} y_k(\lambda_k y_k) = \rho_n \sum_{k=0}^{n-1} y_k^2$, donc

$$\sum_{k=0}^{n-1}(\rho_n - \lambda_k)y_k^2 = 0 \text{ et } \forall k \in [\![0, n-1]\!],\ (\rho_n - \lambda_k)y_k^2 \geq 0.$$

Alors $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $(\rho_n - \lambda_k)y_k^2 = 0$, donc $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $(\rho_n - \lambda_k) = 0$ ou $y_k = 0$. Par conséquent, $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $(\rho_n - \lambda_k)y_k = 0$ ce qui donne $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $\rho_n y_k = \lambda_k y_k$ et ce qui signifie exactement que $D_nY = \rho_nY$.

Alors $D^tPX = \rho_n{}^tPX$ donc $PD^tPX = \rho_nP^tPX$ ou encore $H_nX = \rho_nX$. Donc X est un vecteur propre de H_n associé à la valeur propre ρ_n.

3. On a :

$$\begin{aligned}{}^tX_0H_nX_0 = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} x_ix_j\frac{1}{i+j+1} &\leq \left|\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} x_ix_j\frac{1}{i+j+1}\right| \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} |x_i||x_j|\frac{1}{i+j+1} = {}^t|X_0|H_n|X_0|.\end{aligned}$$

D'où l'inégalité demandée.

D'autre part, $X_0 \in \mathscr{V}$, donc ${}^tX_0H_nX_0 = \rho_n\|X_0\|^2$. Comme $|X_0| \in \mathbb{R}^n$, alors ${}^t|X_0|H_n|X_0| \leq \rho_n\||X_0|\|^2 = \rho_n\|X_0\|^2$. Ainsi ${}^t|X_0|H_n|X_0| = \rho_n\||X_0|\|^2$. Donc $|X_0|$ est un élément non nul de $\mathbb{R}^n$ tel que ${}^t|X_0|H_n|X_0| = \rho_n\||X_0|\|^2$. Ainsi $|X_0|$ est un élément de $\mathscr{V}$.

4. Posons $H_n|X_0| = \begin{pmatrix} t_0 \\ t_1 \\ \vdots \\ t_{n-1}\end{pmatrix}$. Soit $j \in [\![0, n-1]\!]$, $t_j = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{|x_i|}{i+j+1}$. Or $\forall j \in [\![0, n-1]\!]$, $\frac{|x_i|}{i+j+1} > 0$ et il existe $k \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $|x_k| > 0$, donc $t_j = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{|x_i|}{i+j+1} > 0$. Les composantes de $H_n|X_0|$ sont strictement positives.

On a $H_n|X_0| = \rho_n|X_0|$ donc les composantes de $\rho_n|X_0|$ sont strictement positives. comme $\rho_n > 0$ et les composantes de $|X_0|$ sont strictement positives, alors X_0 n'a aucune composante nulle.

5. On a ${}^tX_0H_nX_0 = {}^t|X_0|H_n|X_0|$. Donc $\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}(|x_i||x_j| - x_ix_j)\frac{1}{i+j+1} = 0$, ainsi $\forall i, j \in [\![0, n-1]\!]$, $|x_i||x_j| = x_ix_j$. Alors $\forall i, j \in [\![0, n-1]\!]$, $x_ix_j > 0$, en particulier $x_ix_0 > 0$. Donc les composantes de X_0 sont toutes de même signe.

Maintenant, posons $p = \dim \mathscr{V}$ et supposons $p \geq 2$. $\mathscr{V}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$, donc $\mathscr{V}$ possède une base orthonormée $(X_1, X_2, ..., X_p)$.

Si $p \geq 2$, alors X_1 et X_2 sont deux vecteurs non nuls et orthogonaux. Posons $X_1 = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{pmatrix}$, les a_i (resp. les b_i) sont non nuls et de même signe. Ainsi $a_0b_0, a_1b_1, ..., a_{n-1}b_{n-1}$ sont non nuls et de même signe. Alors nécessairement $\sum_{i=0}^{n-1} a_ib_i = (X_1|X_2)$ n'est pas nulle donc X_1 et X_2 ne sont pas orthogonaux ce qui est absurde donc $p \leq 1$. Or $\mathscr{V}$ est un sous-espace propre donc $\dim \mathscr{V} = p = 1$.

B. Inégalité de Hilbert

6. Posons $P(x) = \sum_{k=0}^{d} a_kx^k$, avec $a_i \in \mathbb{R}$ pour tout $i \in [\![0, n]\!]$. Donc $P(e^{i\theta})e^{i\theta} = \sum_{k=0}^{d} a_ke^{i(k+1)\theta}$.
D'une part, on a :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} P(x)\mathrm{d}x &= \sum_{k=0}^{d} a_k \int_{-1}^{1} x^k \mathrm{d}x \\ &= \sum_{i=0}^{d} a_k \left[\frac{1-(-1)^{k+1}}{k+1}\right] \end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} \int_{0}^{\pi} P(e^{i\theta})e^{i\theta}\mathrm{d}\theta &= \sum_{k=0}^{d} a_k \int_{0}^{\pi} e^{i(k+1)\theta}\mathrm{d}\theta \\ &= \sum_{k=0}^{d} a_k \left[\frac{e^{i(k+1)\theta}}{i(k+1)}\right]_0^{\pi} \\ &= \sum_{k=0}^{d} a_k \left[\frac{e^{i(k+1)\pi}-1}{i(k+1)}\right] \\ &= -i\sum_{i=0}^{d} a_k \left[\frac{1-(-1)^{k+1}}{k+1}\right] \\ &= -i\int_{-1}^{1} P(x)\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

D'où :

$$\left|\int_{-1}^{1} P(x)\mathrm{d}x\right| = \left|i\int_{0}^{\pi} P(e^{i\theta})e^{i\theta}\mathrm{d}\theta\right| \leq \int_{0}^{\pi} |P(e^{i\theta})e^{i\theta}|\mathrm{d}\theta = \int_{0}^{\pi} |P(e^{i\theta})|\mathrm{d}\theta.$$

On a ${}^tXH_nX = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} \frac{x_ix_j}{i+j+1} = \int_0^1 \left[\widetilde{X}(t)\right]^2 \mathrm{d}t$

Il est clair que $\displaystyle\int_0^1 \left[\widetilde{X}(x)\right]^2 \mathrm{d}x \leq \int_{-1}^1 \left[\widetilde{X}(x)\right]^2 \mathrm{d}x$ puisque $[0,1] \subset [-1,1]$ et la fonction sous signe intégral est positive. D'autre part, on a :

$$\int_{-1}^1 \left[\widetilde{X}(x)\right]^2 \mathrm{d}x \leq \int_0^\pi |\widetilde{X}(e^{i\theta})|^2 \mathrm{d}\theta.$$

D'où

$${}^tXH_nX \leq \int_0^\pi |\widetilde{X}(e^{i\theta})|^2 \mathrm{d}\theta.$$

7. L'application $\theta \mapsto \widetilde{X}(e^{i\theta})\widetilde{X}(e^{-i\theta})$ étant paire, donc $\displaystyle\int_0^\pi \widetilde{X}(e^{i\theta})\widetilde{X}(e^{-i\theta})\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^\pi X(e^{i\theta})\widetilde{X}(e^{-i\theta})\mathrm{d}\theta$. Ainsi

$${}^tXH_nX \leq \frac{1}{2}\int_{-\pi}^\pi \widetilde{X}(e^{i\theta})\widetilde{X}(e^{-i\theta})\mathrm{d}\theta.$$

On a $\displaystyle\widetilde{X}(x)^2 = \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^n x_k x_l x^{k+l}$ et donc

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_{-\pi}^\pi \widetilde{X}(e^{i\theta})\widetilde{X}(e^{-i\theta})\mathrm{d}\theta &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^n x_k x_l \int_{-\pi}^\pi e^{i(k-l)}\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^n x_k x_l \delta_{k,l} 2\pi \\
&= \pi \sum_{k=0}^n x_k^2 = \pi\|X\|^2
\end{aligned}$$

où $\delta_{k,l}$ est le symbole de Kronecker. D'où l'inégalité demandée :

$${}^tXH_nX \leq \pi\|X\|^2.$$

8. Soit $X' = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}$ avec $x_n = 0$, $X' \in \mathbb{R}^{n+1}$ et vérifie :

$${}^tX'H_{n+1}X' = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \frac{x_i x_j}{i+j+1} = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{x_i x_j}{i+j+1} = {}^tXH_nX.$$

Comme ${}^tXH_nX \leq \rho_n\|X\|^2$ et ${}^tX'H_{n+1}X' \leq \rho_{n+1}\|X'\|^2 = \rho_{n+1}\|X\|^2$ et $\|X\| \neq 0$, alors $\rho_n \leq \rho_{n+1}$. Ainsi la suite $(\rho_n)_{n\geq 1}$ est croissante. De plus d'après la question **7.**, la suite ρ_n est majorée par π, donc on peut conclure que la suite $(\rho_n)_{n\geq 1}$ est convergente.

C. Opérateur intégral

9. Soit $f \in E$. Pour tout $x \in [0,1[$ et tout $t \in [0,1[$, $|K_n(tx)f(t)| \leq n|f(t)|$ et f est intégrable sur $[0,1[$, donc il est de même de la fonction $t \mapsto K_n(xt)f(t)$, donc l'application $T_n(f)$ est bien défini sur $[0,1[$.
De plus, pour tout $k \in [0,1]$, $|t^k f(t)| \leq |f(t)|$, donc on pet écrire :

$$\forall f \in E, \forall x \in [0,1[, \;\; T_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n-1} x^k \int_0^1 t^k f(t)\mathrm{d}t.$$

Ceci montre que T_n prend ses valeurs dans l'espace des fonctions polynomiales de degré inférieurs ou égal à $n-1$, qui est inclus dans E. L'application T_n est évidement linéaire, ainsi T_n défini un endomrphisme de E.
L'opérateur T_n ne peut pas être injective, sinon E serait isomorphe à un sous-espace de l'espace des fonctions polynomiales de degré inférieurs ou égal à $n-1$, ce qui est impossible puisque E est de dimension infinie, ainsi il existe $f \in E$, non nulle, telle que $T_n(f) = 0$, autrement 0 est une valeur propre de T_n.

10. Soit $X \in \mathbb{R}^n$, on a, pour tout $x \in [0,1[$:

$$T_n(\widetilde{X})(x) = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1}(tx)^k \sum_{j=0}^{n-1} x_j t^j \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} \frac{x_j x^k}{j+k+1},$$

qui s'écrit, matriciellement, sous la forme :

$$T_n(\widetilde{X})(x) = (1, x, ..., x^{n-1}) H_n \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}.$$

• Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de H_n(non nulle), donc il existe $X \in \mathbb{R}^n$, vecteur non nul, tel que $H_n(X) = \lambda X$, ainsi pour tout $x \in [0,1[$, on a :

$$T_n(\widetilde{X})(x) = (1, x, ..., x^{n-1}) H_n X = \lambda (1, x, ..., x^{n-1}) \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = \lambda \sum_{k=0}^{n-1} x_k x^k = \lambda \widetilde{X}(x).$$

Ceci montre que λ est une valeur propre de T_n, car $\widetilde{X}$ est une fonction non nulle.
• Soit maintenant λ une valeur propre non nulle de T_n, donc il existe $f \in E$ vecteur non nul tel que $\forall x \in [0,1[, \;\; T_n(f)(x) = \lambda f(x)$ et donc $f(x) = T_n\left(\dfrac{f}{\lambda}\right)(x)$, comme T_n prend ses valeurs dans l'espace des fonctions polynomiales de degré inférieurs ou égal à $n-1$, alors f est une fonction polynomiale de degré inférieurs ou égal à $n-1$, posons donc $f(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k t^k$ et $X = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix}$. X est un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$, car la fonction f est

non nulle et on a :

$$\forall x \in [0,1[,\ \ T_n(f)(x) = T_n(\widetilde{X})(x) = (1, x, ..., x^{n-1})H_n X = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} \frac{a_k x^j}{j+k+1}.$$

Donc la condition $T_n(f) = \lambda f$ est équivalent à :

$$\forall x \in [0,1[,\ \ \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} \frac{a_k x^j}{j+k+1} = \lambda \sum_{j=0}^{n-1} a_j x^j$$

ou encore

$$\forall x \in [0,1[,\ \ \sum_{j=0}^{n-1}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{j+k+1} - \lambda a_j\right) x^j = 0.$$

Le polynôme $\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{j+k+1} - \lambda a_j\right) Y^j$ de l'indéterminée Y admet donc une infinité de racines, donc il est nul, c'est-à-dire $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{j+k+1} = \lambda a_j = 0$ ou encore

$$H_n \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Ainsi λ est une valeur propre de H_n.
En conclusion T_n et H_n ont les mêmes valeurs propres non nulles.

11. Soit g un vecteur propre de T_n non nul associé à ρ_n. D'après ce qui précède g est une fonction polynomiale, donc elle est continue sur $[0,1]$. En écrivant l'équation de la valeur propre pour g et en divisant par $\varphi \in \mathscr{A}$, on obtient :

$$\forall x \in [0,1[,\ \ \rho_n\left(\frac{g}{\varphi}\right)(x) = \int_0^1 \frac{K_n(xt)\varphi(t)}{\varphi(x)}\left(\frac{g}{\varphi}\right)(t)\mathrm{d}t.$$

Cela montre que $\dfrac{g}{\varphi} \in \mathscr{C}[0,1]$ est une fonction propre de l'opérateur linéaire S_n défini sur $\mathscr{C}[0,1]$ par :

$$\forall x \in [0,1[,\ \ S_n(f)(x) = \int_0^1 K_{n,\varphi}(x,t)f(t)\mathrm{d}t,$$

où $K_{n,\varphi}(x,t) = \dfrac{K_n(xt)\varphi(t)}{\varphi(x)}$. La question **4.** montre que les coefficients de g sont de même signe, donc g ne s'annule pas sur $[0,1[$, et en multipliant par -1, on peut supposer g à valeurs strictement positives sur $[0,1[$ et même sur $[0,1]$. En particulier $g \in \mathscr{A}$. De plus, $K_{n,\varphi}(x,t) \geq 0$.

D'autre part, soit λ une valeur propre de S_n(le spectre $\mathrm{Sp}(S_n)$ des valeurs propres de S_n est non vide, car il contient ρ_n), donc il existe $f \in \mathscr{C}[0,1]$, non nul tel que

$$\forall x \in [0,1],\ \ \lambda f(x) = \int_0^1 K_{n,\varphi}(x,t)f(t)\mathrm{d}t.$$

Donc $|\lambda||f(x)| \leq \|f\|_\infty \int_0^1 K_{n,\varphi}(x,t)\mathrm{d}t$, avec $\|f\|_\infty = \sup_{x\in]0,1[} |f(x)|$. Ainsi

$$|\lambda| \leq \sup_{x\in]0,1[} \int_0^1 K_{n,\varphi}(x,t)\mathrm{d}t = \sup_{x\in]0,1[} \frac{1}{\varphi(x)} \int_0^1 K_n(tx)\varphi(t)\mathrm{d}t.$$

Par conséquent,

$$\sup_{\lambda\in \mathrm{Sp}(S_n)} |\lambda| \leq \sup_{x\in]0,1[} \frac{1}{\varphi(x)} \int_0^1 K_n(tx)\varphi(t)\mathrm{d}t,$$

et donc

$$\rho_n \leq \sup_{x\in]0,1[} \frac{1}{\varphi(x)} \int_0^1 K_n(tx)\varphi(t)\mathrm{d}t \quad (1)$$

L'inégalité (1) est valable pour tout $\varphi \in \mathscr{A}$, d'où

$$\rho_n \leq \inf_{\varphi\in\mathscr{A}} \sup_{x\in]0,1[} \frac{1}{\varphi(x)} \int_0^1 K_n(tx)\varphi(t)\mathrm{d}t \quad (2)$$

Comme $\forall x \in [0,1[, \quad \rho_n = \dfrac{1}{g(x)} \displaystyle\int_0^1 K_n(tx)g(t)\mathrm{d}t$ et $g \in \mathscr{A}$, alors l'inégalité (2) est une égalité.

D. Une majoration explicite des rayons spectraux

12. Posons, pour $x \in]0,1[$ et $t \in [0,1[$, $h(x,t) = \dfrac{t^n\varphi(t)}{1-tx}$. La fonction h admet une dérivée partielle par rapport à x qui vaut :

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,t) = \frac{t^{n+1}\varphi(t)}{(1-tx)^2}.$$

De plus, pour $x \in]0,a]$ avec $0 < a < 1$, on a : $\left|\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| \leq \dfrac{t^{n+1}|\varphi(t)|}{(1-ta)^2}$, cette dernière fonction, indépendante de x, est intégrable sur $[0,1[$ puisque $t \mapsto \dfrac{t^{n+1}}{(1-ta)^2}$ est majorée sur $[0,1[$, donc par théorème de dérivation des fonctions définies par des intégrales, la fonction J_n est dérivables sur $]0,1[$ et on a :

$$\forall x \in]0,1[, \quad J_n(x) = \int_0^1 \frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{t^{n+1}\varphi(t)}{(1-tx)^2}\mathrm{d}t.$$

D'autre part, si $x \in]0,1[$, on obtient :

$$xJ_n(x) = \int_0^1 \frac{xt^{n+1}\varphi(t)}{(1-tx)^2}\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{(1+tx-1)t^n\varphi(t)}{(1-tx)^2}\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{t^n\varphi(t)}{1-tx}\mathrm{d}t - J_n(x).$$

13. • Cas : $n = 0$: On a :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{(1-t)\varphi'(t)}{1-tx}\mathrm{d}t &= \left[\frac{(1-t)\varphi(t)}{1-tx}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{(1-t)}{1-tx}\right)\varphi(t)\mathrm{d}t\\ &= -\varphi(0) - \int_0^1 \frac{(x-1)}{(1-tx)^2}\varphi(t)\mathrm{d}t\\ &= -\varphi(0) - (x-1)\int_0^1 \frac{\varphi(t)}{(1-tx)^2}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Donc $0 = \varphi(0) + (x-1)\displaystyle\int_0^1 \frac{\varphi(t)}{(1-tx)^2}\mathrm{d}t + \int_0^1 \frac{(1-t)\varphi'(t)}{(1-tx)^2}\mathrm{d}t$, dans ce cas $c = \varphi(0)$.

• Cas $n \geq 1$: On a :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{t^n(1-t)\varphi'(t)}{1-tx}\mathrm{d}t &= \left[\frac{t^n(1-t)\varphi(t)}{1-tx}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{t^n(1-t)}{1-tx}\right)\varphi(t)\mathrm{d}t\\ &= -\int_0^1 \frac{(nt^{n-1}-(n+1)t^n)(1-tx)+xt^n(1-t)}{(1-tx)^2}\varphi(t)\mathrm{d}t\\ &= -n\int_0^1 \frac{t^{n-1}\varphi(t)}{1-tx}\mathrm{d}t + (n+1)\int_0^1 \frac{t^n\varphi(t)}{1-tx}\mathrm{d}t - x\int_0^1 \frac{t^n\varphi(t)}{(1-tx)^2}\mathrm{d}t\\ &\quad + \int_0^1 \frac{(xt)t^n\varphi(t)}{(1-tx)^2}\mathrm{d}t\\ &= -nJ_{n-1}(x) + (n+1)J_n(x) - (x-1)\int_0^1 \frac{t^n\varphi(t)}{(1-tx)^2}\mathrm{d}t - J_n(x)\end{aligned}$$

D'où :

$$nJ_n(x) = nJ_{n-1}(x) + (x-1)\int_0^1 \frac{t^n\varphi(t)}{(1-tx)^2}\mathrm{d}t + \int_0^1 \frac{t^n(1-t)\varphi'(t)}{1-tx}\mathrm{d}t$$

Donc, si $n \geq 1$, $c = 0$.

14. On a :

$$\begin{aligned}x(1-x)J_n'(x) &= (1-x)\int_0^1 \frac{t^n\varphi(t)}{(1-tx)^2}\mathrm{d}t - (1-x)J_n(x)\\ &= (x-1)J_n(x) + c_n + nJ_{n-1}(x) + \int_0^1 \frac{t^n(1-t)\varphi'(t)}{1-tx}\mathrm{d}t - nJ_n(x)\\ &= c + (x-n-1)J_n(x) + n\int_0^1 \frac{t^{n-1}\varphi'(t)}{1-tx}\mathrm{d}t + \int_0^1 \frac{t^n(1-t)\varphi'(t)}{1-tx}\mathrm{d}t\\ &= c + (x-n-1)J_n(x) + n\int_0^1 \frac{t^{n-1}(1-tx+tx)\varphi(t)}{1-tx}\mathrm{d}t + \int_0^1 \frac{t^n(1-t)\varphi'(t)}{1-tx}\mathrm{d}t\\ &= c + (x-n-1+nx)J_n(x) + n\int_0^1 t^{n-1}\varphi(t)\mathrm{d}t + \int_0^1 \frac{t^n(1-t)\varphi'(t)}{1-tx}\mathrm{d}t\\ &= c + (x-1)(n+1)J_n(x) + n\int_0^1 t^{n-1}\varphi(t)\mathrm{d}t + \int_0^1 \frac{t^n(1-t)\varphi'(t)}{1-tx}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

15. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du premier ordre, la solution générale est de la forme $y(t) = K(1-t)^{\gamma}$. On a les propriétés suivantes :

— y est continue sur $[0,1[$ quel que soit la valeur de γ,
— y est strictement positive sur $[0,1[$ si, et seulement si, $K>0$,
— $\dfrac{1}{y}$ se prolonge par continuité sur $[0,1]$ si, et seulement si, $\gamma<0$,
— y est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1[$ quel que soit la valeur de γ,
— $\lim\limits_{t\to 1^-}(1-t)y(t)=K\lim\limits_{t\to 1^-}(1-t)^{\gamma+1}=0$ si, et seulement si, $\gamma+1>0$.

Donc y vérifie les conditions faites sur φ si, et seulement si, $K>0$ et $\gamma\in]-1,0[$.

16. Soit $x\in]0,1[$, on a :

$$\begin{aligned}
\Phi'(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left((1-x)^{-\gamma}x^n\right)J_n(x)+(1-x)^{-\gamma}x^nJ_n(x)'(x)\\
&= \left(\frac{\gamma}{1-x}+\frac{n}{x}\right)(1-x)^{-\gamma}x^nJ_n(x)\\
&\quad +(1-x)^{-\gamma-1}x^{n-1}\left(c+(x-1)(n+1)J_n(x)+n\int_0^1 t^{n-1}\varphi(t)\mathrm{d}t+\int_0^1\frac{t^n(1-t)\varphi'(t)}{1-tx}\mathrm{d}t\right)\\
&= \left(\frac{\gamma}{1-x}+\frac{n}{x}\right)\Phi_n(x)+\frac{cx^{n-1}}{(1-x)^\gamma}-\frac{n+1}{x}\Phi_n(x)\\
&\quad +\frac{x^{n-1}}{(1-x)^{\gamma+1}}\left(n\int_0^1 t^{n-1}(1-t)^\gamma\mathrm{d}t-\gamma J_n(x)\right)\\
&= -(\gamma+1)\frac{\Phi_n(x)}{x}+c_n\frac{x^{n-1}}{(1-x)^{1+\gamma}}
\end{aligned}$$

où $c_n=c+n\displaystyle\int_0^1 t^{n-1}(1-t)^\gamma\mathrm{d}t=c+n\frac{\Gamma(n)\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(n+\gamma+1)}=c+\frac{n!}{(n+\gamma)(n+\gamma-1)...(\gamma+1)}$.

17. La solution de l'équation homogène est de la forme $y(x)=\dfrac{K}{x^{\gamma+1}}$. La méthode de la variation de la constante, donc une solution de la forme :

$$t\mapsto \lambda+c_n\int_0^x\frac{t^{n+\gamma}}{(1-t)^{1+\gamma}}\mathrm{d}t$$

et comme $\Phi_n(0)=0$, alors

$$\forall x\in]0,1[,\ \ \Phi_n(x)=\frac{c_n}{x^{1+\gamma}}\int_0^x\frac{t^{n+\gamma}}{(1-t)^{1+\gamma}}\mathrm{d}t.$$

18. Pour tout $x\in]0,1[$, on a :

$$\begin{aligned}
r_n(x) &= \frac{1}{\varphi(x)}\int_0^1\sum_{k=0}^{n-1}(tx)^k\varphi(t)\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{\varphi(x)}\int_0^1\frac{1-(tx)^n}{1-tx}\varphi(t)\mathrm{d}t,\quad tx\neq 1\\
&= \frac{1}{\varphi(x)}\int_0^1\frac{\varphi(x)}{1-tx}\mathrm{d}t-\frac{x^n}{\varphi(x)}\int_0^1\frac{t^n\varphi(x)}{1-tx}\mathrm{d}t\\
&= \frac{x^0J_0(x)}{\varphi(x)}-\frac{x^nJ_n(x)}{\varphi(x)}\\
&= \Phi_0(x)-\Phi_n(x).
\end{aligned}$$

Donc $r_n(x) = \dfrac{c_0}{x^{1+\gamma}} \displaystyle\int_0^x \dfrac{t^\gamma}{(1-t)^{1+\gamma}}\mathrm{d}t - \dfrac{c_n}{x^{1+\gamma}} \displaystyle\int_0^x \dfrac{t^{n+\gamma}}{(1-t)^{1+\gamma}}\mathrm{d}t$. $c_0 = \varphi(0) = 1$ et si $n \geq 1$,

$$c_n = \frac{n!}{(n+\gamma)(n+\gamma-1)\dots(\gamma+1)} = \theta_n.$$

Ainsi,

$$r_n(x) = \frac{}{x^{1+\gamma}} \int_0^x \frac{t^\gamma}{(1-t)^{1+\gamma}}\mathrm{d}t - \frac{c_n}{x^{1+\gamma}} \int_0^x \frac{t^\gamma}{(1-t)^{1+\gamma}}\mathrm{d}t = \frac{1}{x^{1-\alpha}} \int_0^x \frac{1-\theta_n t^n}{t^\alpha (1-t)^{1-\alpha}}\mathrm{d}t.$$

Quand α décrit l'intervalle $]0,1[$, la fonction φ décrit $\mathscr{A}$, donc on peut conclure que :

$$\rho_n \leq \inf_{\alpha\in]0,1[} \sup_{x\in]0,1[} r_n(x) = \inf_{\alpha\in]0,1[} \sup_{x\in]0,1[} \frac{1}{x^{1-\alpha}} \int_0^x \frac{1-\theta_n t^n}{t^\alpha(1-t)^{1-\alpha}}\mathrm{d}t.$$

19. De la question précédente on peut déduire, en particulier pour $\alpha = \dfrac{1}{2}$, que

$$\rho_n \leq \theta_n^{\frac{1-\frac{1}{2}}{n}} \int_0^{\theta_n^{\frac{-1}{n}}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(1-1)}}.$$

La fonction $t \mapsto -2\arctan\left(\sqrt{\dfrac{1-t}{t}}\right) = 2\arctan\left(\sqrt{\dfrac{t}{1-t}}\right) - \pi = 2\arcsin\sqrt{t} - \pi$ est une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t(1-t)}}$, donc :

$$\theta_n^{\frac{1-\frac{1}{2}}{n}} \int_0^{\theta_n^{\frac{-1}{n}}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(1-1)}} = \theta_n^{\frac{1}{2n}}\left(2\arcsin\theta_n^{\frac{-1}{2n}}\right) = 2w_n \arcsin\left(\frac{1}{w_n}\right).$$

Ainsi,

$$\rho_n \leq 2w_n \arcsin\left(\frac{1}{w_n}\right).$$

20. Utilisons la formule de Stirling $n! \underset{+\infty}{\sim} \left(\dfrac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$, pour trouver un équivalent de w_n :

$$w_n = 2\left(\frac{(n!)^2}{(2n)!}\right)^{\frac{1}{2n}} \underset{+\infty}{\sim} 2\frac{\left(\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}\right)^{\frac{1}{n}}}{\left(\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}\sqrt{4\pi n}\right)^{\frac{1}{2n}}} = 2\frac{\frac{n}{e}\sqrt[2n]{2\pi}n^{\frac{1}{n}}}{\frac{2n}{e}\sqrt[4n]{4\pi}n^{\frac{1}{2n}}} \underset{+\infty}{\sim} n^{\frac{1}{4n}}.$$

D'où, $n(w_n - 1) \underset{+\infty}{\sim} n\left(n^{\frac{1}{4n}} - 1\right) = n\left(e^{\frac{\ln(n)}{4n}} - 1\right) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(n)}{4}$ et donc :

$$w_n - 1 \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{4n},$$

ce qui implique immédiatement

$$\pi - 2w_n\arcsin\left(\frac{1}{w_n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \pi - 2n^{\frac{1}{4n}}\frac{\pi}{2} = \pi\left(1 - e^{\frac{\ln(n)}{4n}}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{\pi\ln(n)}{4n}.$$

Donc $\lim_{n\to\infty} \pi - 2w_n \arcsin\left(\frac{1}{w_n}\right) = 0$ et $\pi - 2w_n \arcsin\left(\frac{1}{w_n}\right) \leq 0$ pour n assez grand. D'après la partie **B**, la question **7.**, $\forall n \geq 0, \quad \rho_n \leq \pi$, par conséquent, et pour n assez grand,

$$0 \leq \pi - \rho_n \leq 2w_n \arcsin\left(\frac{1}{w_n}\right) - \pi.$$

Ainsi,

$$\lim_{n\to\infty} \rho_n = \pi.$$

• • • • • • • • •