A2019 – MATH I MP

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARISTECH,
TELECOM PARISTECH, MINES PARISTECH,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT Atlantique, ENSAE PARISTECH,
CHIMIE PARISTECH.

Concours Centrale-Supélec (Cycle International),
Concours Mines-Télécom, Concours Commun TPE/EIVP.

CONCOURS 2019

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES I - MP

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Comportement asymptotique de sommes de séries entières et application à l'équation d'Airy

---

Soit p un entier naturel non nul et r un nombre réel. On considère la fonction définie sur $\mathbf{C}$ par la série entière

$$S_{r,p}(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(pn)^r}{(pn)!}\, z^{pn}.$$

L'objectif, dans les parties A et B du problème, est d'établir l'équivalence suivante quand $x \to +\infty$:

$$S_{r,p}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x^r\, e^x}{p}. \tag{$H_{r,p}$}$$

Cet énoncé est noté $(H_{r,p})$. Dans la partie C, on applique ce résultat à l'étude asymptotique d'une solution particulière de l'équation d'Airy.

1. **Question préliminaire**. Justifier que la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(pn)^r}{(pn)!}\, z^n$ a pour rayon de convergence $+\infty$. Qu'en est-il de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(pn)^r}{(pn)!}\, z^{pn}$?

A Équivalence entre $(H_{r,p})$ et $(H_{r,1})$ lorsque $r > 0$

On suppose dans cette partie que $p \geqslant 2$ et $r > 0$, et on se propose de montrer que les énoncés $(H_{r,p})$ et $(H_{r,1})$ sont équivalents. Pour tous $n \in \mathbf{N}$ et $x \in \mathbf{R}_+^*$, on pose

$$u_n(x) = \frac{n^r}{n!}\, x^n.$$

2. Pour $x > 0$ fixé, étudier le signe de la fonction

$$\varphi_x : t \in [1, +\infty[\ \mapsto t^{1-r}(t-1)^r - x.$$

En déduire que φ_x s'annule en un unique élément de $[1, +\infty[$ que l'on note t_x. Montrer que la suite finie $\big(u_n(x)\big)_{0\leqslant n\leqslant \lfloor t_x\rfloor}$ est croissante et que la suite infinie $\big(u_n(x)\big)_{n\geqslant \lfloor t_x\rfloor}$ est décroissante, où $\lfloor x\rfloor$ désigne la partie entière du nombre réel x.

L'ensemble $\{u_n(x)\ ;\ n \in \mathbf{N}\}$ admet donc un maximum égal à $u_{\lfloor t_x \rfloor}(x)$. Dans la suite de cette partie, ce maximum sera noté M_x.

3. Pour tout $\alpha \in \mathbf{R}$, déterminer la limite de $\varphi_x(x+\alpha)$ quand x tend vers $+\infty$. En déduire que $t_x - x - r$ tend vers zéro lorsque $x \to +\infty$. (On pourra s'aider de la définition d'une limite.)

4. Montrer que pour tout entier relatif k, $u_{\lfloor x \rfloor + k}(x) \sim u_{\lfloor x \rfloor}(x)$ lorsque $x \to +\infty$. En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}$ et pour tout x au voisinage de $+\infty$,
$$\sum_{i=\lfloor x \rfloor - n}^{\lfloor x \rfloor} u_i(x) \geqslant n\, u_{\lfloor x \rfloor}(x).$$

5. En déduire que pour tout entier relatif k,
$$u_{\lfloor x \rfloor + k}(x) = o(x^r e^x)$$
quand $x \to +\infty$. Montrer alors que
$$M_x = o(x^r e^x).$$
(On pourra d'abord démontrer que, pour x assez grand, $M_x = u_{\lfloor x \rfloor + i}(x)$ pour un entier i compris entre $\lfloor r \rfloor - 1$ et $\lfloor r \rfloor + 2$.)

6. Soit z un nombre complexe tel que $|z| = 1$ et $z \neq 1$. Pour tout entier naturel n non nul, on pose
$$D_n = \sum_{k=0}^{n-1} z^k.$$
Pour tout nombre réel $x > 0$, comparer $S_{r,1}(zx)$ à la somme
$$\sum_{n=1}^{+\infty} D_n \Big(u_{n-1}(x) - u_n(x)\Big).$$
En déduire que pour tout x au voisinage de $+\infty$, $\Big|S_{r,1}(zx)\Big| \leqslant \dfrac{4\, M_x}{|1-z|}$ et conclure que lorsque $x \to +\infty$,
$$S_{r,1}(zx) = o(x^r e^x).$$

7. On pose $\zeta = \exp\left(\frac{2i\pi}{p}\right)$. Pour tout réel x, montrer que
$$\sum_{k=0}^{p-1} S_{r,1}(\zeta^k x) = p\, S_{r,p}(x)$$
et en déduire que les énoncés $(H_{r,p})$ et $(H_{r,1})$ sont équivalents.

B Une démonstration probabiliste

On admet dans cette partie qu'il existe, sur un certain espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, une famille $(X_x)_{x\in\mathbf{R}_+^*}$ de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbf{N}$ telle que X_x suive la loi de Poisson de paramètre x pour tout réel $x > 0$. On fixe de telles données dans l'intégralité de cette partie.

Soit un réel $r > 0$. On pose

$$Z_x = \frac{X_x}{x}$$

et on se propose de démontrer que $\mathbf{E}(Z_x^r) \to 1$ lorsque $x \to +\infty$.

8. Pour tout réel $\alpha > 0$, montrer que $\mathbf{P}\Big(|X_x - x| > \alpha\, x^{2/3}\Big) \to 0$ quand $x \to +\infty$.

9. Montrer que, pour tout réel $x > 1$, les variables aléatoires

$$A_x = \mathbf{1}_{(Z_x < 1 - x^{-1/3})}\, Z_x^r \quad \text{et} \quad B_x = \mathbf{1}_{(|Z_x - 1| \leqslant x^{-1/3})}\, Z_x^r$$

sont d'espérance finie et trouver les limites de $\mathbf{E}(A_x)$ et de $\mathbf{E}(B_x)$ lorsque $x \to +\infty$.

Soit N un entier naturel strictement positif.

10. Montrer que pour tout réel $x > 0$, la variable aléatoire

$$Y_{N,x} = \mathbf{1}_{(X_x > x + x^{2/3})} \prod_{k=0}^{N-1} (X_x - k)$$

est d'espérance finie et que

$$x^N\, \mathbf{P}\Big(X_x > x + x^{2/3} - N\Big) = \mathbf{E}(Y_{N,x}).$$

Déduire alors de la question 8 que $\mathbf{E}(Y_{N,x}) = o(x^N)$ quand $x \to +\infty$.

11. Montrer qu'il existe des réels $a_1, \ldots, a_N$ tels que pour tout réel $x > 0$,

$$\mathbf{1}_{(X_x > x + x^{2/3})}\, X_x^N = \sum_{k=1}^{N} a_k\, Y_{k,x}$$

et en déduire la limite de $\mathbf{E}\Big(\mathbf{1}_{(Z_x > 1 + x^{-1/3})}\, Z_x^N\Big)$ lorsque $x \to +\infty$.

12. Démontrer que $\mathbf{E}\Big(\mathbf{1}_{(Z_x > 1 + x^{-1/3})}\, Z_x^r\Big) \to 0$ quand $x \to +\infty$. En déduire que $\mathbf{E}(Z_x^r) \to 1$ quand $x \to +\infty$ et conclure à la validité de l'énoncé $H_{r,1}$.

En combinant les résultats des deux parties précédentes, nous concluons à la validité de $(H_{r,p})$ pour tout entier naturel $p > 0$ et tout réel $r > 0$. Dans la suite du sujet, nous aurons besoin du résultat classique suivant, que nous admettrons :

Lemme de comparaison asymptotique des séries entières. Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites à termes réels. On suppose que :

(i) la série entière $\sum\limits_n b_n z^n$ a pour rayon de convergence $+\infty$;

(ii) les suites $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sont équivalentes ;

(iii) il existe un rang $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, on a $b_n > 0$.

Alors la série entière $\sum\limits_n a_n z^n$ a pour rayon de convergence $+\infty$ et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \underset{x\to+\infty}{\sim} \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n.$$

Soit un entier naturel $p > 0$ et un nombre réel r.

13. En remarquant que pour tout réel $x > 0$,

$$S_{r,p}(x) = x^p \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(p(n+1))^r}{(p(n+1))!}\, x^{np},$$

déduire du lemme de comparaison asymptotique des séries entières que

$$S_{r,p}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^p\, S_{r-p,p}(x).$$

En déduire que $(H_{r,p})$ implique $(H_{r-p,p})$ et conclure à la validité de $(H_{r,p})$.

C Application à l'équation d'Airy

L'équation différentielle d'Airy (Ai) est définie par

$$x''(t) = t\, x(t). \qquad \text{(Ai)}$$

14. **Question préliminaire**. Soit un réel $x > 0$. Pour tout entier $n > 0$, on pose $v_n = \sum_{k=1}^n \ln k + x \ln n - \sum_{k=0}^n \ln(x+k)$. Établir la convergence de la série $\sum(v_n - v_{n-1})$, et en déduire l'existence d'un réel $\Gamma(x) > 0$ vérifiant la *formule d'Euler* :

$$\prod_{k=0}^{n} (x+k) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^x\, n!}{\Gamma(x)}.$$

15. Justifier qu'il existe une unique solution f de (Ai) sur $\mathbf{R}$ vérifiant $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$.

16. Expliciter une suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que pout tout réel t, $f(t)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n\, t^n$.

17. Démontrer que $a_{3n} \sim \dfrac{\Gamma(\frac{2}{3})\, n^{1/3}}{9^n\,(n!)^2}$ puis que $a_{3n} \sim n^{-1/6}\, \dfrac{\Gamma(\frac{2}{3})}{\sqrt{\pi}} \left(\dfrac{2}{3}\right)^{2n} \dfrac{1}{(2n)!}$ lorsque $n \to +\infty$.

18. En déduire une constante C, que l'on exprimera à l'aide de $\Gamma(\frac{2}{3})$, telle que

$$f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} C\, t^{-1/4} \exp\left(\frac{2}{3}\, t^{3/2}\right).$$

Fin du problème