**Mines MP2 2018**
**Un corrigé**

# 1 Quelques exemples

1. Pour tout réel $\theta$, on a
$$\begin{pmatrix}\cos(\theta) & \sin(\theta)\\ \sin(\theta) & -\cos(\theta)\end{pmatrix}^2 = I_2$$
Comme cos (et sin) prennent une infinité de valeurs, $\boxed{I_2 \text{ admet une infinité de racines carrées}}$.
Par ailleurs, pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, $P(I_2) = P(1)I_2$ qui est une racine carrée de $I_2$ si et seulement si $P(1)^2 = 1$ i.e. $P(1) \in \{1, -1\}$. Ainsi,
$$\boxed{\text{Les seuls polynômes en } I_2 \text{ qui sont des racines carrées de } I_2 \text{ sont } I_2 \text{ et } -I_2}$$

2. On vérifie que
$$\boxed{\forall a \in \mathbb{C}^*,\ \begin{pmatrix}0 & a & 0\\ 0 & 0 & 1/a\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}^2 = A}$$
et $A$ possède donc une infinité de racines carrées.
Comme $A^2 = 0$, pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$, $P(A) \in \mathrm{Vect}(I_3, A)$ et s'écrit donc $P(A) = \alpha I_3 + \beta A$. On a alors
$$P(A)^2 = \alpha^2 I_3 + 2\alpha\beta A$$
Si, par l'absurde, $P(A)^2 = A$ alors (comme $(I_3, A)$ est libre) $\alpha^2 = 0$ et $2\alpha\beta = 1$ ce qui est impossible ($\alpha = 0$ entraine $\alpha\beta = 0$).
$$\boxed{\text{Aucune racine carrée de } A \text{ n'est un polynôme en } A}$$

3. Comme $A$ est symétrique réelle, le théorème spectral nous indique qu'elle est orthodiagonalisable, c'est-à-dire qu'il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que
$$P^{-1}AP = D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$
les $\lambda_i$ étant les valeurs propres de $A$, supposées ici positives.
   - Existence : posons
   $$B = P\Delta P^{-1} \ \text{ avec } \ \Delta = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$$
   Comme $P$ est orthogonale ($P^{-1} = P^T$), $B$ est symétrique. Ses valeurs propres sont les $\sqrt{\lambda_i} > 0$. $B$ est donc définie positive. Enfin,
   $$B^2 = P\Delta^2P^{-1} = PDP^{-1} = A$$
   et $B$ est une racine carrée de $A$.
   - Unicité : soit $B$ symétrique définie positive telle que $B^2 = A$. Comme $B$ et $A$ commutent, tout sous-espace propre pour $A$ est stable par l'endomorphisme $b$ canoniquement associé à $B$. Si $\lambda$ est valeur propre de $A$, $b$ induit sur $E_\lambda(A)$ un endomorphisme $b_\lambda$.
   Comme $b$ est diagonalisable, $b_\lambda$ l'est aussi. Si $\mu$ est valeur propre de $b_\lambda$ et $x$ un vecteur propre associé, alors $\mu^2 x = b_\lambda^2(x) = a(x) = \lambda x$ (on note $a$ l'endomorphisme canoniquement associé à $A$ et on a $a(x) = \lambda x$ car $x \in E_\lambda(A)$ puisque $x$ est vecteur propre pour $b_\lambda$ défini sur cet espace). Ainsi $\mu^2 = \lambda$ et comme les valeurs propres de $b$ (et donc celle de $b_\lambda$) sont positives, $\mu = \sqrt{\lambda}$.
   On vient de voir que $b$ agit comme $\sqrt{\lambda}$ sur $E_\lambda(A)$. Comme $A$ est diagonalisables, ses sous-espaces propres sontg supplémentaires dans $\mathbb{R}^n$ et $b$ est donc parfaitement définie. $B$ est donc unique.

Avec des notations classiques ($\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices symétriques réelles définies positives).

$$\boxed{A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \text{ admet une unique racine carrée dans } \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})}$$

# 2 Existence et calcul d'une racine carrée

4. $U^2$ et $T$ étant triangulaires, elles sont égales si et seulement si elles ont même triangle supérieur. La condition d'égalité des termes diagonaux donne

$$\forall i \in \{1, \dots, n\},\ u_{i,i}^2 = t_{i,i}$$

Pour $j > i$, on a ($u_{k,j} = 0$ si $k > j$ et $u_{i,k} = 0$ si $i > k$)

$$(U^2)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} u_{i,k}u_{k,j} = \sum_{k=i}^{j} u_{i,k}u_{k,j} = u_{i,i}u_{i,j} + \sum_{k=i+1}^{j-1} u_{i,k}u_{k,j} + u_{i,j}u_{j,j}$$

La condition d'égalité du terme d'indice $(i,j)$ avec $j > i$ est donc

$$(u_{i,i} + u_{j,j})u_{i,j} = t_{i,j} - \sum_{k=i+1}^{j-1} u_{i,k}u_{k,j} \qquad (*)$$

$$\boxed{U^2 = T \iff \begin{cases} u_{i,i}^2 = t_{i,i} & (1 \le i \le n) \\ (u_{i,i} + u_{j,j})u_{i,j} = t_{i,j} - \sum\limits_{k=i+1}^{j-1} u_{i,k}u_{k,j} & (1 \le i < j \le n) \end{cases}}$$

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. $z$ admet deux racines carrées opposées que l'on écrit $a + ib$ et $-a - ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ nous tous deux nuls. En choisissant la bonne racine, on peut alors affirmer que $z$ possède une racine qui est soit de partie réelle $> 0$ soit de partie réelle nulle et de partie imaginaire $> 0$.
Ici, tous les $t_{i,i}$ sont non nuls car $T$ est inversible et admettent donc une racine carrée $u_{i,i}$ ayant la propriété précédente. Grâce à cette propriété, $\forall i, j,\ u_{i,j} + u_{j,j} \neq 0$ (soit la partie réelle est $> 0$, soit elle est nulle et alors c'est la partie imaginaire qui est $> 0$).
En faisant ce choix pour les $u_{i,i}$, les formules $(*)$ pour $j = i+1$ permettent d'obtenir $u_{i,i+1}$ pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$.
Les formules $(*)$ pour $j = i+2$ permettent alors d'obtenir $u_{i,i+2}$ pour tout $i \in \{1, \dots, n-2\}$ (les $u_{x,y}$ du membre de droite ont déjà été définis).
On peut ainsi, par récurrence, obtenir les $u_{i,j}$ pour $j - i = 1, 2, \dots, n-1$ et obtenir une solution au système.

$$\boxed{\text{Une matrice triangulaire supérieure inversible admet une racine carrée}}$$

5. Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, toute matrice est trigonalisable. Il existe donc $P$ inversible telle que $P^{-1}AP = T$ est triangulaire. $T$ est aussi inversible (semblable à $A$) et admet une racine carrée $U$. $PUP^{-1}$ est alors une racine carrée de $A$.

$$\boxed{\text{Toute matrice inversible admet une racine carrée}}$$

Les valeurs propres de $A$ sont les coefficients diagonaux de $T$. Si les $t_{i,i}$ sont dans $\widetilde{\mathbb{C}}$ alors une racine carrée de $t_{i,i}$ n'est pas imaginaire pure. Ainsi, le choix fait ci-dessus des $u_{i,i}$ donne une racine carrée $U$ de $t$ dont les valeurs propres (les $u_{i,i}$) sont de partie réelle $> 0$. Ces valeurs propres sont aussi celles de $PUP^{-1}$ (deux matrices semblables ont même spectre). Ainsi,

$$\boxed{\text{Si } \mathrm{Sp}(A) \subset \widetilde{\mathbb{C}} \text{ alors } A \text{ admet une racine carrée à valeurs propres de partie réelle} > 0}$$

## 3 Algorithme de Newton

6. On a

$$\|AB\|^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j}\right|^2$$

On utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$ pour obtenir

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}|\cdot|b_{k,j}|\right)^2 \leq \sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}|^2 \sum_{k=1}^{n} |b_{k,j}|^2$$

Les deux combinés (avec l'inégalité triangulaire) donnent

$$\|AB\|^2 \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}|^2 \sum_{k=1}^{n} |b_{k,j}|^2\right) = \|A\|^2\|B\|^2$$

Le passage à la racine carrée étant croissant,

$$\boxed{\|AB\| \leq \|A\|\|B\|}$$

7. Comme on est dans $\mathbb{C}$, le polynôme minimal de $A$ s'écrit

$$m_A = \prod_{\lambda\in\mathrm{Sp}(A)} (X-\lambda)^{\alpha_\lambda}$$

On a donc

$$m_A(B) = \prod_{\lambda\in\mathrm{Sp}(A)} (B-\lambda I_n)^{\alpha_\lambda}$$

Cette matrice est inversible si et seulement si tous ces facteurs le sont (le voir, par exemple, en passant au déterminant) c'est à dire si aucune valeur propre de $A$ n'est valeur propre de $B$ ($B - xI_n$ étant inversible ssi $x$ n'est pas valeur propre de $B$). Ceci s'écrit

$$\boxed{m_A(B) \text{ est inversible si et seulement si } A \text{ et } B \text{ n'ont aucune valeur propre commune}}$$

Supposons qu'il existe $M$ non nulle telle que $AM = MB$. Montrons tout d'abord, par récurrence, que

$$\forall p\in\mathbb{N},\ A^pM = MB^p$$

- Initialisation : c'est immédiat si $p = 0$.
- Hérédité : supposons le résultat vrai au rang $p$. On a alors

$$A^{p+1}M = AA^pM = AMB^p = MBB^p = MB^{p+1}$$

ce qui donne le résultat au rang $p+1$

Par combinaisons linéaires, on en déduit que

$$\forall P\in\mathbb{C}[X],\ P(A)M = MP(B)$$

En prenant $P = m_A$, on en déduit que $Mm_A(B) = 0$. Comme $M \neq 0$, $m_A(B)$ est non inversible et $A$ et $B$ ont une valeur propre en commun.

$$\boxed{(\exists M\neq 0/\ AM = MB) \Rightarrow \mathrm{Sp}(A)\cap\mathrm{Sp}(B)\neq\emptyset}$$

8. $A$ et $B$ ont une valeur propre commune $\lambda$, il en est donc de même de $A$ et $B^T$ (une matrice et sa transposée ont même polynôme caractéristique et donc même spectre).
On peut donc $X$ un vecteur propre pour $A$ et $Y$ un vecteur propre pour $B^T$ associés à $\lambda$. On a alors $M = XY^T$ qui vérifie $AM = MB = \lambda M$. De plus, $M$ est non nulle (il existe $i$ et $j$ tels que $x_i \neq 0$ et $y_j \neq 0$ et alors $M_{i,j} = x_i y_j \neq 0$).
$$\boxed{(\exists M \neq 0/\ AM = MB) \iff \mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B) \neq \emptyset}$$
9. On a
$$F(X + H) - F(X) = (X + H)^2 - X^2 = HX + XH + H^2$$
$H \mapsto HX + HX$ est linéaire et $\|H^2\| \leq \|H\|^2 = o(\|H\|)$. Par définition de la différentielle en $X$, on a donc
$$\boxed{\forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ dF_X(H) = XH + HX}$$
Supposons $dF_X$ inversible. Alors $XH + HX = 0$ implique $H = 0$ (caractère injectif de l'endomorphisme $dF_X$). $XM = M(-X)$ n'admet alors pas de solution non nulle donc $X$ et $-X$ n'ont pas de valeur propre en commun. Les valeurs propres de $-X$ étant les opposées de celles de $X$, il n'existe aucun complexe $z$ tel que $z$ et $-z$ soient valeurs propres de $X$.
Réciproquement, si cette condition a lieu alors $XH+HX = 0$ implique $H = 0$ et $dF_X$ est injectif et donc inversible (endomorphisme injectif en dimension finie).
$$\boxed{dF_X \in GL(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})) \text{ ssi il n'existe aucun complexe } z \text{ tel que } z \text{ et } -z \text{ soient valeurs propres de } X}$$
$\boxed{\text{Cette condition implique l'inversibilité de } X}$ car sinon 0 et $-0$ sont valeurs propres de $X$.
10. Par définition $X^* = \sqrt{A}$ a des valeurs propres qui sont toutes de partie réelle $> 0$. Il n'y a donc pas de valeur propre $z$ telle que $-z$ soit aussi valeur propre et $\boxed{dF_{X^*} \text{ est inversible}}$.
$F$ étant de classe $C^1$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (théorèmes d'opérations) l'application $X \mapsto dF_X$ est continue de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$. L'image réciproque de l'ouvert $GL_n(\mathbb{C})$ par cette application est donc un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Cet ouvert contient $X^*$ et donc aussi une boucle centrée sur $X^*$. Ainsi
$$\boxed{\exists r > 0/\ \forall X \in \overline{B}(X^*, r),\ dF_X \in GL_n(\mathbb{C})}$$
11. Par définition de $X^*$, $F(X^*) = (X^*)^2 - A = A - A = 0$. Ainsi
$$G(X^*) = X^* - (dF_{X^*})^{-1}(F(X^*)) = X^*$$
puisque $(dF_{X^*})^{-1}$ est linéaire et envoie 0 sur 0 : $\boxed{G(X^*) = X^*}$.
On a de même (en notant que $F(X^* + H) = (X^* + H)^2 - A = X^*H + HX^* + H^2$)
$$G(X^* + H) = X^* + H - (dF_{X^*+H})^{-1}(F(X^* + H)) = X^* + H - (dF_{X^*+H})^{-1}(X^*H + HX^* + H^2)$$
et en faisant la différence
$$G(X^* + H) - G(X^*) = H - (dF_{X^*+H})^{-1}(X^*H + HX^* + H^2)$$
Remarquons que
$$dF_{X^*+H}(H) = (X^* + H)H + H(X^* + H) = X^*H + HX^* + 2H^2$$
On a donc
$$G(X^* + H) - G(X^*) = H - (dF_{X^*+H})^{-1}(dF_{X^*+H}(H) - H^2)$$
Par linéarité de $(dF_{X^*+H})^{-1}$, on a ainsi
$$G(X^* + H) - G(X^*) = H - (dF_{X^*+H})^{-1}(dF_{X^*+H}(H)) + (dF_{X^*+H})^{-1}(H^2)$$
Comme $(dF_{X^*+H})^{-1}(dF_{X^*+H}(H)) = (dF_{X^*+H})^{-1} \circ dF_{X^*+H}(H) = H$, on conclut que

$$\boxed{G(X^* + H) - G(X^*) = (dF_{X^*+H})^{-1}(H^2)}$$

Par ailleurs, on a

$$dF_{X^*+H}(M) = (X^* + H)M + M(X^* + H)$$

$$\begin{aligned} dF_{X^*} \circ (Id + (dF_{X^*})^{-1} \circ dF_H)(M) &= dF_{X^*}(M + (dF_{X^*})^{-1}(MH + HM)) \\ &= dF_{X^*}(M) + dF_{X^*} \circ (dF_{X^*})^{-1}(MH + HM) \\ &= X^*M + MX^* + MH + HM \end{aligned}$$

Ainsi

$$dF_{X^*+H} = dF_{X^*} \circ (Id + (dF_{X^*})^{-1} \circ dF_H)$$

Il reste à passer à l'inverse pour conclure que

$$\boxed{(dF_{X^*+H})^{-1} = (Id + (dF_{X^*})^{-1} \circ dF_H)^{-1} \circ (dF_{X^*})^{-1}}$$

12. On va conclure en utilisant la notion de norme subordonnée (qui n'est pas au programme). Soit $(E, \|.\|)$ un espace de dimension finie (disons $p$) que l'on munit d'une base. On peut alors identifier $\mathcal{L}(E)$ à $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ et donc munir $\mathcal{L}(E)$ de la norme $\|.\|$ du début de la partie (notée comme la norme sur $E$, mais ce n'est pas la même). On montre alors comme en question 6 que

$$\forall u \in \mathcal{L}(E),\ \forall x \in E,\ \|u(x)\| \le \|u\| \cdot \|x\| \qquad (*)$$

Ici, l'espace considéré est $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (muni de $\|.\|$ du début de la partie par exemple). On munit l'espace $\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$ de la norme, notée $\|.\|$, définie ci-dessus.
$F$ étant de classe $C^1$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et le passage à l'inverse étant continu sur $GL(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$, $X \mapsto (dF_X)^{-1}$ est continue sur $\overline{B}(X^*, r)$. Cette boule fermée étant un compact, l'application est bornée sur ce compact et

$$\exists C /\ \forall X \in \overline{B}(X^*, r),\ \|(dF_X)^{-1}\| \le C$$

On en déduit, avec la propriété $(*)$ et la question précédente, que

$$\forall H \in B(0, r),\ \|G(X^* + H) - G(X^*)\| \le \|(dF_{X^*+H})^{-1}\|.\|H^2\| \le C\|H^2\|$$

La question 6 donne $\|H^2\| \le \|H\|^2$ et ce que l'on a montré donné donc

$$\boxed{\exists\, C > 0 /\ \forall X \in B(X^*, r),\ \|G(X) - X^*\| \le C\|X - X^*\|^2}$$

13. Pour $k = 0$, l'inégalité à prouver est $\|X_k - X^*\| \le \frac{\rho}{\sqrt{C}}$ sous la seule hypothèse $\|X^* - X_0\| < \rho$. **Cela me semble impossible**. Je vais donc prouver un résultat légérement différent.
On choisit $\rho = \min(r, 1/C, r/C)$ et on suppose que $X_0 \in B(X^*, \rho)$. Montrons par récurrence sur $k \ge 0$ que $X_k$ est bien défini et qu'on a la majoration

$$\|X_k - X^*\| \le \frac{(\rho C)^{2^k}}{C}$$

- Initialisation : $X_0$ est bien défini et $\|X_0 - X^*\| \le \rho = \frac{\rho C}{C}$. Le résultat est vrai au rang 0.
- Hérédité : on suppose le résultat vrai à un rang $k$. On a alors $\|X_k - X^*\| \le \frac{(\rho C)^{2^k}}{C}$. Comme $\rho C \le 1$, $(\rho C)^{2^k} \le \rho C$ (car $2^k \ge 1$) et donc

  $$\|X_k - X^*\| \le \rho C \le r$$

  Comme $X_k \in \overline{B}(X^*, r)$, $dF_{X_k}$ est inversible et $X_{k+1}$ existe bien. De plus

  $$\|X_{k+1} - X^*\| = \|G(X_k) - G(X^*)\| \le C\|X_k - X^*\|^2 \le C\left(\frac{(\rho C)^{2^k}}{C}\right)^2 = \frac{(\rho C)^{2^{k+1}}}{C}$$

  ce qui prouve le résultat au rang $k + 1$.

On peut en fait réduire la constante $\rho$ autant que l'on veut. Cela signifie que

$$\boxed{\text{Pourvu que } X_0 \text{ soit assez proche de } X^*,\ (X_k) \text{ converge vers } X^*}$$

## 4 Forme équivalente

14. On suppose $(X_k)$ bien définie. En particulier, $dF_{X_k}$ est inversible pour tout $k$. Montrons par récurrence sur $k$ que $U_k$ est bien défini et que $U_k = X_k$.
    - Initialisation : le résultat est immédiat pour $k = 0$.
    - Hérédité : supposons le résultat vrai au rang $k$. Comme $X_k = U_k$, $dF_{U_k}$ est inversible et il existe une unique matrice $H_k$ telle que $U_kH_k + H_kU_k = A - U_k^2$ et c'est
    $$H_k = (dF_{X_k})^{-1}(A - X_k^2) = (dF_{X_k})^{-1}(-F(X_k)) = -(dF_{X_k})^{-1}(F(X_k))$$
    Ainsi $U_{k+1}$ est bien défini et vaut $X_{k+1}$.

    Réciproquement, on suppose $(U_k)$ bien définie et on pose $X_0 = U_0$. Montrons par récurrence sur $k$ que $X_k$ est bien défini et que $X_k = U_k$
    - Initialisation : le résultat est immédiat pour $k = 0$.
    - Hérédité : supposons le résultat vrai au rang $k$. Comme $U_{k+1}$ est bien définie, $U_kM + MU_k = A - U_k^2$ admet une unique solution c'est à dire que $dF_{X_k}(M) = A - X_k^2$ admet une unique solution.
    Soit $\varphi$ un endomorphisme d'un espace $E$ de dimension finie. Pour $a \in E$, l'ensemble des solutions de l'équation $\varphi(x) = a$ (d'inconnue $x \in E$) est soit vide soit un espace affine dirigé par le noyau de $\varphi$. S'il existe un $a$ pour lequel l'ensemble des solutions est un singleton, c'est donc que $\varphi$ est injective (noyau de dimension 0) et, par dimension, $\varphi$ est inversible.
    Ici, on en conclut que $dF_{X_k}$ est inversible et que $X_{k+1}$ est bien défini. Le même calcul que plus haut montre que $X_{k+1} = U_{k+1}$.

    $$\boxed{\text{Si } X_0 = U_0,\ (U_k) \text{ et } (X_k) \text{ sont simultanément bien définies et égale dans ce cas}}$$

15. On procède encore par récurrence pour montrer que pour tout entier $k$, $V_k$ est bien définie et que $U_k = V_k$ commute avec $A$.
    - Initialisation : le résultat est immédiat pour $k = 0$.
    - Hérédité : supposons le résultat vrai à un rang $k$. Avec la question précédente (et comme on suppose les condition vérifiées), $dF_{U_k} = dF_{X_k}$ est inversible et la question 9 indique que $V_k = U_k$ est inversible. $V_{k+1}$ est donc bien définie.
    Posons $G_k = \frac{1}{2}(U_k^{-1}A - U_k)$. On a
    $$\begin{aligned} U_kG_k + G_kU_k &= \frac{1}{2}U_k(U_k^{-1}A - U_k) + \frac{1}{2}(U_k^{-1}A - U_k)U_k \\ &= \frac{1}{2}(A + U_k^{-1}AU_k) - U_k^2 \\ &= A - U_k^2 \text{ car } AU_k = U_kA \end{aligned}$$
    Ainsi, $U_{k+1} = U_k + G_k = V_k + \frac{1}{2}(V_k^{-1}A - V_k) = V_{k+1}$. De plus, comme $V_k$ et $A$ commutent, il en est de même de $V_k^{-1}$ et $A$ et donc de $V_{k+1}$ et $A$.

16. Prouvons par récurrence que $e_1, \dots, e_n$ sont propres pour $V_k$ et en notant $\lambda_{k,i}$ les valeurs propres correspondantes, que $\lambda_{k,i} > 0$ pour tout $i$. Remarquons que l'hypothèse au rang $k$ donnera le caractère défini positif de $V_k$ puisque $V_k$ sera diagonalisable en b.o.n. (on peut choisir ainsi les $e_i$) à valeurs propres $> 0$. En particulier aussi, $V_k$ sera inversible.
    - Initialisation : le résultat est vrai pour $k = 0$ et $\lambda_{0,i} = \mu$
    - Hérédité : supposons le résultat vrai pour un rang $k$. On a alors
    $$V_{k+1}e_i = \frac{1}{2}(V_ke_i + V_k^{-1}Ae_i) = \frac{1}{2}(\lambda_{k,i}e_i + \lambda_iV_k^{-1}e_i)$$

Comme $V_k e_i = \lambda_{k,i} e_i$ et $V_k$ inversible, on a $V_k^{-1} e_i \frac{1}{\lambda_{k,i}} e_i$. Finalement,

$$V_{k+1} e_i = \frac{1}{2}\left(\lambda_{k,i} + \frac{\lambda_i}{\lambda_{k,i}}\right) e_i$$

Comme les $\frac{1}{2}\left(\lambda_{k,i} + \frac{\lambda_i}{\lambda_{k,i}}\right)$ sont positifs, on a le résultat au rang $k+1$.

$$\boxed{V_k \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \text{ et } \forall k,\ \lambda_{k+1,\ell} = \frac{1}{2}\left(\lambda_{k,\ell} + \frac{\lambda_\ell}{\lambda_{k,\ell}}\right)}$$

17. On prouve le résultat par récurrence sur $k$.
    - Initialisation : On a
    $$\lambda_{1,\ell} = \frac{1}{2}\left(\lambda_{0,\ell} + \frac{\lambda_\ell}{\lambda_{0,\ell}}\right) = \frac{1}{2}\left(\mu + \frac{\lambda_\ell}{\mu}\right)$$
    Le calcul donne alors (même calcul que dans l'hérédité)
    $$\frac{\lambda_{1,\ell} - \sqrt{\lambda_\ell}}{\lambda_{1,\ell} + \sqrt{\lambda_\ell}} = \left(\frac{\mu - \sqrt{\lambda_\ell}}{\mu + \sqrt{\lambda_\ell}}\right)^2$$
    ce qui donne le résultat au rang 0.
    - Hérédité : on suppose le résultat vrai jusqu'à un rang $k-1 \geq 0$. On a (avec les formules de la question 16)
    $$\lambda_{k+1,\ell} + \sqrt{\lambda_\ell} = \frac{1}{2\lambda_{k,\ell}}\left(\lambda_{k,\ell} + \sqrt{\lambda_\ell}\right)^2$$
    $$\lambda_{k+1,\ell} - \sqrt{\lambda_\ell} = \frac{1}{2\lambda_{k,\ell}}\left(\lambda_{k,\ell} - \sqrt{\lambda_\ell}\right)^2$$
    Le quotient donne le carré de la quantité au rang $k-1$ ce qui permet d'obtenir le résultat au rang $k$.

$$\boxed{\frac{\lambda_{k+1,\ell} - \sqrt{\lambda_\ell}}{\lambda_{k+1,\ell} + \sqrt{\lambda_\ell}} = \left(\frac{\mu - \sqrt{\lambda_\ell}}{\mu + \sqrt{\lambda_\ell}}\right)^{2^{k+1}}}$$

18. Comme $V_k$ a les mêmes vecteurs propres que $A$, elle est diagonalisable via la même matrice de passage :
$$V_k = P\mathrm{diag}(\lambda_{k,1}, \ldots, \lambda_{k,n})P^T$$
Comme $\mu$ et les $\lambda_\ell$ sont $> 0$, on a $0 \leq \mu - \sqrt{\lambda_\ell} < \mu + \sqrt{\lambda_\ell}$ et la question précédente donne
$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\lambda_{k+1,\ell} - \sqrt{\lambda_\ell}}{\lambda_{k+1,\ell} + \sqrt{\lambda_\ell}} = 0$$
En notant $u_k = \frac{\lambda_{k+1,\ell} - \sqrt{\lambda_\ell}}{\lambda_{k+1,\ell} + \sqrt{\lambda_\ell}}$, on a
$$\lambda_{k+1,\ell}(u_k - 1) = \sqrt{\lambda_\ell}(-u_k - 1)$$
Comme $u_k \to 0$, on conclut que $\lambda_{k+1,\ell} \to \sqrt{\lambda_\ell}$. Ainsi, la suite de terme général $\mathrm{diag}(\lambda_{k,1}, \ldots, \lambda_{k,n})$ est convergente de limite $\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})$. Par continuité de $M \mapsto PMM^T$,

$$\boxed{(V_k) \text{ converge vers l'unique racine carrée définie positive de } A}$$

## 5 Stabilité

19. Notons que les colonnes de $P$ sont les vecteurs propres $e_i$. En particulier, on a

$$V_0 C_j = \sqrt{\lambda_j} C_j$$

et donc aussi

$$V_0^{-1} C_j = \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} C_j$$

et comme $V_0$ est symétrique, on obtient en transposant

$$C_j^T V_0 = \sqrt{\lambda_j} C_j^T \quad \text{et} \quad C_j^T V_0^{-1} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} C_j^T$$

On en déduit en particulier que

$$\Delta V_0^{-1} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} \Delta \quad \text{et} \quad V_0^{-1} \Delta = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \Delta$$

On en déduit aussi que

$$\Delta V_0^{-1} \Delta V_0^{-1} = \frac{1}{\lambda_j} \Delta^2 = \frac{1}{\lambda_j} C_i \underbrace{C_j^T C_i}_{=0} C_j^T$$

la nullité étant due au fait que les colonnes de $P$ forment une base orthonormée.
On forme alors le produit

$$(V_0 + \Delta)(V_0^{-1} - V_0^{-1} \Delta V_0^{-1}) = I_n - \Delta V_0^{-1} \Delta V_0^{-1} = I_n$$

et on en déduit que $V_0 + \Delta$ est inversible avec

$$\boxed{(V_0 + \Delta)^{-1} = V_0^{-1} - V_0^{-1} \Delta V_0^{-1}}$$

On en déduit que

$$\widehat{V_1} = \frac{1}{2}(V_0 + \Delta + (V_0^{-1} - V_0^{-1} \Delta V_0^{-1}) A)$$

et on a aussi

$$V_1 = \frac{1}{2}(V_0 + V_0^{-1} A)$$

En formant la différence, on en déduit que

$$\boxed{\Delta_1 = \frac{1}{2}(\Delta - V_0^{-1} \Delta V_0^{-1} A)}$$

20. Supposons que $\widehat{V_k} = \sqrt{A} + \eta^k \Delta$. Comme ci-dessus (en remplaçant $\varepsilon$ par $\varepsilon \eta^k$) on a (rappelons que $V_0 = \sqrt{A}$)

$$\widehat{V_k}^{-1} = V_0^{-1} - V_0^{-1} \eta^k \Delta V_0^{-1}$$

et ainsi

$$\begin{aligned} \widehat{V_{k+1}} &= \frac{1}{2}(\widehat{V_k} + \widehat{V_k}^{-1} A) \\ &= \frac{1}{2}(\sqrt{A} + \eta^k \Delta + V_0^{-1} A - \eta^k V_0^{-1} \Delta V_0^{-1} A) \end{aligned}$$

On vérifie que $V_0^{-1}A = \sqrt{A}$ avec l'expression obtenue en question 3 de la racine carrée d'une symétrique définie positive. On utilise aussi les remarques du début de question 19 pour obtenir

$$\eta^k\Delta - \eta^k V_0^{-1}\Delta V_0^{-1}A = \eta^k\Delta - \eta^k V_0^{-1}\Delta V_0 = \eta^k\left(1 - \sqrt{\frac{\lambda_j}{\lambda_i}}\right)\Delta$$

On en déduit que

$$\widehat{V_{k+1}} = \sqrt{A} + \frac{\eta^k}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{\lambda_j}{\lambda_i}}\right)\Delta$$

On va ainsi pouvoir prouver par récurrence que

$$\boxed{\widehat{V_k} = \sqrt{A} + \eta^k\Delta \text{ avec } \eta = \tfrac{1}{2}\left(1 - \sqrt{\tfrac{\lambda_j}{\lambda_i}}\right)}$$

21. Pour que $(\widehat{V_k})$ converge, il faut et suffit que $\eta \in ]-1,1]$ c'est à dire que $\frac{\lambda_j}{\lambda_i} < 9$ (ce quotient est positif).

$$\boxed{\text{Il suffit que le conditionnement soit strictement inférieur à 9}}$$