A 2016 - MATH. II MP.

École des PONTS ParisTech,
ISAE-SUPAERO, ENSTA ParisTech,
TÉLÉCOM ParisTech, MINES ParisTech,
MINES Saint-Étienne, MINES Nancy,
TÉLÉCOM Bretagne, ENSAE ParisTech (Filière MP).

CONCOURS 2016

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)
L'usage de l'ordinateur ou de la calculatrice est interdit.

Sujet mis à la disposition des concours :
Concours Commun TPE/EIVP, Concours Mines-Télécom, Concours Centrale-Supélec (Cycle international).

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES II - MP

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Dans tout le problème, I désigne l'intervalle $]0,+\infty[$.

A Une intégrale à paramètre

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on pose, sous réserve d'existence,

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)}\, du \qquad \text{et} \qquad K = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\, du.$$

1. Montrer que la fonction $\psi : u \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}$ est intégrable sur I.

2. Déterminer les valeurs de x pour lesquelles $F(x)$ est définie.

3. Montrer que la fonction F est de classe C^1 sur I et exprimer $F'(x)$ sous forme intégrale.

4. En déduire que pour tout $x \in I$, $xF'(x) - (x - \frac{1}{2})F(x) = -K$.

5. Pour tout $x \in I$, on pose $G(x) = \sqrt{x}\,\mathrm{e}^{-x}F(x)$. Montrer qu'il existe une constante réelle C telle que pour tout $x \in I$, $G(x) = C - K \cdot \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}} dt$.

6. Déterminer les limites de G en 0 et $+\infty$, et en déduire la valeur de K.

B Étude de deux séries de fonctions

Dans toute cette partie, on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{\sqrt{n}}$ et $g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{n}\mathrm{e}^{-nx}$.

7. Montrer que f et g sont définies et continues sur I.

8. Montrer que pour tout $x \in I$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ux}}{\sqrt{u}} du \leqslant f(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ux}}{\sqrt{u}} du$. En déduire un équivalent de $f(x)$ lorsque $x \to 0$.

9. Montrer que la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}\right)_{n\geqslant 1}$ converge.

10. Démontrer que pour tout $x > 0$, la série $\sum_{n\geqslant 1}\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{\mathrm{k}}}\Big)\mathrm{e}^{-nx}$ converge et exprimer sa somme $h(x)$ en fonction de $f(x)$ pour tout $x \in I$.

11. En déduire un équivalent de $h(x)$ lorsque $x \to 0$. Montrer alors que $g(x)$ est équivalent à $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2x^{3/2}}$ lorsque $x \to 0$.

C Séries de fonctions associées à des ensembles d'entiers

À tout ensemble $A \subseteq \mathbb{N}$ on associe la suite (a_n) définie par

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \in A, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit I_A l'ensemble des réels $x \geqslant 0$ pour lesquels la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n \mathrm{e}^{-nx}$ converge. On pose $f_A(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \mathrm{e}^{-nx}$ pour tout $x \in I_A$. Enfin, sous réserve d'existence, on pose $\Phi(A) = \lim_{x \to 0} x\, f_A(x)$ et on note S l'ensemble des parties $A \subseteq \mathbb{N}$ pour lesquelles $\Phi(A)$ existe.

12. Quel est l'ensemble I_A si A est fini ? Si A est infini, montrer que l'on peut extraire une suite (b_n) de la suite (a_n) telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = 1$. Déterminer I_A dans ce cas.

13. Soit $A \in S$ et (a_n) la suite associée. Pour tout entier naturel n, on note $A(n)$ l'ensemble des éléments de A qui sont $\leqslant n$. Vérifier que pour tout $x > 0$ la série $\sum_{n\geqslant 0} \mathrm{Card}(A(n))\, \mathrm{e}^{-nx}$ converge et que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Card}(A(n))\, \mathrm{e}^{-nx} = \frac{f_A(x)}{1-\mathrm{e}^{-x}}.$$

Dans la question suivante, $A = A_1$ désigne l'ensemble des carrés d'entiers naturels non nuls.

14. Montrer que si $x > 0$, $\dfrac{f_{A_1}(x)}{1-\mathrm{e}^{-x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \lfloor \sqrt{n} \rfloor \mathrm{e}^{-nx}$ où $\lfloor\cdot\rfloor$ désigne la partie entière.

    En déduire un encadrement de $\sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{n}\mathrm{e}^{-nx} - \dfrac{f_{A_1}(x)}{1-\mathrm{e}^{-x}}$, puis un équivalent de f_{A_1} en 0. Prouver alors que $A_1 \in S$ et donner $\Phi(A_1)$.

Dans la question suivante, $A = A_2$ désigne l'ensemble constitué des entiers qui sont la somme des carrés de deux entiers naturels non nuls. On admet que $A_2 \in S$, et on désire majorer $\Phi(A_2)$.

Soit $v(n)$ le nombre de couples d'entiers naturels non nuls (p, q) pour lesquels $n = p^2 + q^2$.

15. Montrer que pour tout réel $x > 0$, la série $\sum_{n \geqslant 0} v(n)\mathrm{e}^{-nx}$ converge et établir que
$$\sum_{n=0}^{+\infty} v(n)\mathrm{e}^{-nx} = (f_{A_1}(x))^2.$$
Montrer alors que pour tout $x > 0$, $f_{A_2}(x) \leqslant (f_{A_1}(x))^2$. En déduire un majorant de $\Phi(A_2)$.

D Un théorème taubérien

Soit $(\alpha_n)_{n \geqslant 0}$ une suite de nombres réels positifs tels que pour tout réel $x > 0$, la série $\sum_{n \geqslant 0} \alpha_n \mathrm{e}^{-nx}$ converge. On suppose que

$$\lim_{x \to 0} \Big(x \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \mathrm{e}^{-nx} \Big) = \ell \in [0, +\infty[.$$

On note F l'espace vectoriel des fonctions de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, E le sous-espace de F des fonctions continues par morceaux et E_0 le sous-espace de E des fonctions continues sur $[0, 1]$. On munit E de la norme $\| \; \|_\infty$définie par la formule $\|\psi\|_\infty = \sup\limits_{t \in [0,1]} |\psi(t)|$.

Si $\psi \in E$, on note $L(\psi)$ l'application qui à $x > 0$ associe

$$(L(\psi))(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \mathrm{e}^{-nx} \psi(\mathrm{e}^{-nx}).$$

16. Montrer que $L(\psi)$ est bien définie pour tout $\psi \in E$ et que l'application L est une application linéaire de E dans F. Vérifier que, pour tous ψ_1, ψ_2 dans E, $\psi_1 \leqslant \psi_2$ entraîne $L(\psi_1) \leqslant L(\psi_2)$.

On note E_1 l'ensemble des $\psi \in E$ pour lesquels $\lim\limits_{x \to 0} x\,(L(\psi))(x)$ existe et si $\psi \in E_1$, on pose
$$\Delta(\psi) = \lim_{x \to 0} x\,(L(\psi))(x).$$

17. Vérifier que E_1 est un sous-espace vectoriel de E et que l'application Δ est une forme linéaire continue de $(E_1, \| \; \|_\infty)$.

18. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $e_p : t \in [0, 1] \mapsto t^p$ appartient à E_1 et calculer $\Delta(e_p)$. En déduire que $E_0 \subseteq E_1$ et calculer $\Delta(\psi)$ pour tout $\psi \in E_0$.

Pour tous $a, b \in [0,1]$ tel que $a < b$, on note $1_{[a,b]} : [0,1] \to \{0,1\}$ la fonction définie par

$$1_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [a,b] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit $a \in]0,1[$ et $\varepsilon \in]0, \min(a, 1-a)[$. On note

$$g_-(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, a-\varepsilon] \\ \dfrac{a-x}{\varepsilon} & \text{si } x \in]a-\varepsilon, a[\\ 0 & \text{si } x \in [a,1] \end{cases}$$

et

$$g_+(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, a] \\ \dfrac{a+\varepsilon-x}{\varepsilon} & \text{si } x \in]a, a+\varepsilon[\\ 0 & \text{si } x \in [a+\varepsilon,1]. \end{cases}$$

19. Vérifier que g_- et g_+ appartiennent à E_0 et calculer $\Delta(g_-)$ et $\Delta(g_+)$. Montrer alors que $1_{[0,a]} \in E_1$ et calculer $\Delta(1_{[0,a]})$. En déduire que $E_1 = E$ et donner $\Delta(\psi)$ pour tout $\psi \in E$.

On considère maintenant la fonction ψ définie sur $[0,1]$ par la formule :

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, \frac{1}{\mathrm{e}}[\\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x \in [\frac{1}{\mathrm{e}}, 1]. \end{cases}$$

20. Calculer $(L(\psi))(\frac{1}{N})$ pour tout entier $N > 0$ et en déduire la limite

$$\lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N} \alpha_k$$

(théorème taubérien).

On rappelle que $v(n)$ est le nombre de couples d'entiers naturels non nuls (p,q) tels que $n = p^2 + q^2$.

21. Si $A \in S$, que vaut $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} \mathrm{Card}(A(n))$? Déterminer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} v(k)$.

Fin du problème