Correction de l'épreuve Mines MP 2 (année 2015)

Frédéric Morlot et Jean Nougayrède

Partie A - Norme d'opérateur d'une matrice

1) $\mathbb{R}^n$ est de dimension finie et S^{n-1} est évidemment une partie bornée de $\mathbb{R}^n$.
C'est aussi une partie fermée ; en effet, l'application $x \mapsto \|x\|$ est 1-lipschitzienne par la seconde inégalité triangulaire, donc elle est continue, puis S^{n-1} est l'image réciproque du fermé $\{1\}$ par cette dernière application.
Donc S^{n-1} est un compact de $\mathbb{R}^n$.
$x \mapsto Mx$ est continue sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, car linéaire en dimension finie, et $y \mapsto \|y\|$ est continue sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Donc $x \mapsto \|Mx\|$ est continue sur $\mathbb{R}^n$, donc en particulier sur le compact S^{n-1}, et à valeurs réelles.
Par le théorème des bornes atteintes, cette fonction admet un maximum ce qui justifie l'existence de $\|M\|_{op}$.

2)
- $M \mapsto \|M\|_{op}$ est bien définie sur $M_n(\mathbb{R})$ et à valeurs réelles positives.
- Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$
Il existe $y \in S^{n-1}$ tel que $\|\lambda M\|_{op} = \|\lambda My\| = |\lambda|\|My\|$.
Ayant $\|My\| \leq \|M\|_{op}$ et $|\lambda| \geq 0$, on en déduit $\|\lambda M\|_{op} \leq |\lambda| \times \|M\|_{op}$.
Par ailleurs, il existe $z \in S^{n-1}$ tel que $\|M\|_{op} = \|Mz\|$.
Alors $|\lambda| \times \|M\|_{op} = \|\lambda Mz\| \leq \|\lambda M\|_{op}$ ce qui achève de démontrer la propriété d'homogénéité : $\|\lambda M\|_{op} = |\lambda| \times \|M\|_{op}$
- Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ tel que $\|M\|_{op} = 0$.
Alors l'ensemble $\{\|Mx\|, x \in S^{n-1}\}$ est à la fois inclus dans $\mathbb{R}^+$ et majoré par 0.
Donc $\forall x \in S^{n-1}, Mx = 0$.
La base canonique $(e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ est formée de vecteurs de S^{n-1} donc $\forall k \in [\![1, n]\!], Me_k = 0$. Or Me_k est aussi la k-ième colonne de M. Donc $M = 0$.
- Soit $(A, B) \in M_n(\mathbb{R})^2$.
Il existe $y \in S^{n-1}$ tel que $\|A + B\|_{op} = \|(A + B)y\| = \|Ay + By\|$.
Par l'inégalité triangulaire puis par définition de $\|.\|_{op}$, $\|A + B\|_{op} \leq \|Ay\| + \|By\| \leq \|A\|_{op} + \|B\|_{op}$

Donc $M \mapsto \|M\|_{op}$ est bien une norme.

Enfin, soit $(x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$ et $M \in M_n(\mathbb{R})$.
Lorsque $x = y$, l'inégalité à démontrer se réécrit $0 \leq 0$...
Supposons donc $x \neq y$.
Alors $\|x - y\| \neq 0$ et $\dfrac{x - y}{\|x - y\|} \in S^{n-1}$, donc :

$$\left\| M.\frac{x - y}{\|x - y\|} \right\| \leq \|M\|_{op}.$$

Par positivité de $\|x - y\|$ et homogénéité de $\|.\|$, on obtient l'inégalité souhaitée.

3) Dans cette question, $\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure usuelle d'espace euclidien. La norme considérée est bien la norme euclidienne associée.

- Il existe $a \in \sigma(M)$ tel que $|a| = \max\{|\lambda|, \lambda \in \sigma(M)\}$.
Il existe un vecteur propre (non nul) pour la valeur propre a que l'on note u et, quitte à le diviser par $\|u\|$, on peut le supposer unitaire.
Par propriété de $\|M\|_{op}$, $\|Mu\| \leq \|M\|_{op}$ donc $\|a.u\| \leq \|M\|_{op}$ soit $|a| = |a| \times \|u\| \leq \|M\|_{op}$
- M est symétrique réelle, donc par conséquence du théorème spectral, il existe une base orthonormée $(v_1, \ldots, v_n)$ de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de M. Notons $(a_1, \ldots, a_n)$ la liste des valeurs propres associées à ces vecteurs propres.

Signalons que pour tout $k \in [\![1, n]\!], a_k^2 \leq a^2$.
Il existe $y \in S^{n-1}$ tel que $\|M\|_{op} = \|My\|$.
Écrivons $y = y_1.v_1 + \ldots + y_n.v_n$ la décomposition de y dans la base orthonormée $(v_1, \ldots, v_n)$.
Alors $My = y_1 a_1 v_1 + \ldots + y_n a_n v_n$ donc, par le théorème de Pythagore on a :

$$\|My\|^2 = a_1^2 y_1^2 + \ldots + a_n^2 y_n^2 \leq a^2 \times \|y\|^2 = a^2$$

puis, par croissance de la fonction $\sqrt{\cdot}$ et positivité de la norme, $\|My\| \leq |a|$ soit $\|M\|_{op} \leq |a|$

- Conclusion : par double inégalité, $\boxed{\|M\|_{op} = |a|}$.

4)
- commençons par supposer que $n \geq 2$.
J_n est non nulle donc de rang supérieur ou égal à 1 et toutes ses colonnes sont proportionnelles à la première donc $\mathrm{rg}(J_n) \leq 1$.
Ainsi, $\mathrm{rg}(J_n) = 1$ donc par conséquence du théorème du rang, $\boxed{\dim(\mathrm{Ker}(J_n)) = n - 1}$.
Ainsi, 0 est valeur propre de J_n d'ordre de multiplicité $n - 1$ et le sous-espace propre associé est l'hyperplan d'équation cartésienne $x_1 + \ldots + x_n = 0$
${}^t(1, \ldots, 1)$ est clairement vecteur propre associé à la valeur propre n, donc n est valeur propre d'ordre de multiplicité au moins 1 et le sous-espace propre associé contient $\mathrm{Vect}({}^t(1, \ldots, 1))$.
On dispose donc de suffisamment de valeurs propres comptées avec leur ordre de multiplicité, ce qui permet de conclure :
$\boxed{\sigma(J_n) = \{0, n\}}$ et le sous-espace propre associé à la valeur propre n est exactement $\mathrm{Vect}({}^t(1, \ldots, 1))$.
- si $n = 1$, 1 est l'unique valeur propre et le sous-espace propre associé est $\mathbb{R}$.
- enfin, J_n est symétrique réelle, donc par application de la question précédente on a $\boxed{\|J_n\|_{op} = n}$ dans tous les cas

5) Dans cette question, on travaille dans $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne usuelle et on note $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$.
Le produit scalaire suivant se calcule facilement : $\langle e_i, Me_j \rangle = M_{i,j}$.
Par conséquence de l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|M_{i,j}| = |\langle e_i, Me_j \rangle| \leq \|e_i\| \times \|Me_j\| = \|Me_j\| \leq \|M\|_{op},$$

car $(e_i, e_j) \in (S^{n-1})^2$. $\|M\|_{op}$ étant indépendant de i et de j, on obtient bien l'inégalité souhaitée :

$$\boxed{\max\{|M_{i,j}|, (i, j) \in [\![1, n]\!]^2\} \leq \|M\|_{op}}.$$

6)
- Déjà, ${}^tMM$ est une matrice symétrique réelle et ses valeurs propres sont positives ou nulles.
En effet, si $a \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de ${}^tMM$, alors il existe $v \in \mathbb{R}^n$ non nul tel que ${}^tMMv = a.v$ ce qui donne par produit à gauche par ${}^tv$: $\|Mv\|^2 = a \times \|v\|^2$ puis $a = \dfrac{\|Mv\|^2}{\|v\|^2} \in \mathbb{R}^+$.
Ensuite, il existe $y \in S^{n-1}$ tel que $\|M\|_{op} = \|My\|$. Puis on a :

$$\begin{array}{rcl} \|My\|^2 & = & {}^ty\,{}^tMMy \\ & = & \langle y, {}^tMMy \rangle \\ & \leq & \|y\| \times \|{}^tMM\|_{op} \\ & = & \|{}^tMM\|_{op} \end{array}$$

par conséquence de l'inégalité de Cauchy-Schwarz et de la définition de la norme d'opérateur. En notant alors b la plus grande valeur propre (donc aussi la plus grande en valeur absolue) de ${}^tMM$, la question 3) montre que $\|My\|^2 \leq b$.

Par ailleurs, ${}^tMM$ étant diagonalisable, la trace de ${}^tMM$ est la somme de ses valeurs propres comptées avec leur ordre de multiplicité ; et ces valeurs propres étant dans $\mathbb{R}^+$, on a :

$$\|M\|_{op}^2 \leq b \leq \mathrm{Tr}({}^tMM) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} M_{i,j}^2.$$

Conclusion : par croissance de la racine carrée et positivité de $\|M\|_{op}$, on obtient l'inégalité souhaitée.

- Condition nécessaire. Supposons l'égalité dans l'inégalité précédemment démontrée.
Alors, en reprenant les notations précédentes, $b = \mathrm{Tr}({}^tMM)$ ce qui montre que ${}^tMM$ admet 0 comme valeur propre d'ordre de multiplicité au moins $n-1$. Donc $\mathrm{rg}({}^tMM) \leq 1$.
Or $\mathrm{Ker}(M) \subset \mathrm{Ker}({}^tMM)$ et si $v \in \mathrm{Ker}({}^tMM)$, alors $\|Mx\|^2 = {}^tx{}^tMMx = 0$ donc $Mx = 0$ donc $x \in \mathrm{Ker}(M)$.
L'égalité des noyaux fournit alors l'égalité des rangs : $\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}({}^tMM)$.
Donc $\boxed{\mathrm{rg}(M) \leq 1}$.
- Condition suffisante : Supposons que $\mathrm{rg}(M) \leq 1$.
Alors, d'après ce qui précède, $\mathrm{rg}({}^tMM) \leq 1$ donc 0 est au moins $n-1$ fois valeurs propre de ${}^tMM$ et on peut noter $b \geq 0$ la dernière valeur propre de ${}^tMM$. Notons que $\mathrm{Tr}({}^tMM) = b$.
Or il existe $y \in S^{n-1}$ un vecteur propre de ${}^tMM$ associé à la valeur propre b, puis l'égalité :
$$ {}^tMMy = b.y $$
fournit $\|My\|^2 = b$ par multiplication à gauche par ${}^ty$. La définition de $\|M\|_{op}$ fournit alors $b \leq \|M\|_{op}^2$ donc $\sqrt{\mathrm{Tr}({}^tMM)} \leq \|M\|_{op}$, ce qui donne
$$ \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} M_{i,j}^2} \leq \|M\|_{op}, $$
d'où l'égalité des deux membres car l'autre inégalité est toujours vérifiée.
- **Suite à la lecture d'un autre corrigé, voici une solution plus naturelle...**
Soit $x \in S^{n-1}$.
Alors $\|Mx\|^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} M_{i,j}x_j\right)^2$
D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, :
$$ \left(\sum_{j=1}^{n} M_{i,j}x_j\right)^2 \leq \left(\sum_{j=1}^{n} M_{i,j}^2\right) \times \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right) = \sum_{j=1}^{n} M_{i,j}^2 $$
Donc, par somme, $\|Mx\|^2 \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} M_{i,j}^2$
Par croissance de la racine carrée et positivité de la norme :
$$ \|Mx\| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} M_{i,j}^2} $$
Le dernier majorant étant indépendant de x, par propriété de la borne supérieure, on en déduit :
$$ \boxed{\|M\|_{op} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} M_{i,j}^2}} $$
- *Condition nécessaire.* Supposons l'égalité pour une certaine matrice M.
Il existe $x \in S^{n-1}$ tel que $\|M\|_{op} = \|Mx\|$
Alors $0 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} M_{i,j}^2 - \|Mx\|^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} M_{i,j}^2 - \left(\sum_{j=1}^{n} M_{i,j}x_j\right)^2\right)$.
Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\sum_{j=1}^{n} M_{i,j}^2 - \left(\sum_{j=1}^{n} M_{i,j}x_j\right)^2 \geq 0$ et la somme de ces n réels est nulle.
Donc pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\sum_{j=1}^{n} M_{i,j}^2 - \left(\sum_{j=1}^{n} M_{i,j}x_j\right)^2 = 0$.
Les listes $(M_{i,1},....,M_{i,n})$ et $(x_1,...,x_n)$ vérifient donc le cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
Ces deux vecteurs sont donc liés.
Ayant $(x_1,...,x_n) \neq (0,...,0)$, on en déduit que la i-ème ligne de M, $(M_{i,1},....,M_{i,n})$, est proportionnelles à x ce qui démontre que $\underline{\mathrm{rg}(M) \leq 1}$

- *Condition suffisante.* Supposons $\mathrm{rg}(M) \leq 1$.
Si $\mathrm{rg}(M) = 0$, alors $M = 0$ donc $\|M\|_{op} = 0 = \sqrt{\sum_{1\leq i,j\leq n} M_{i,j}^2}$
Si $\mathrm{rg}(M) = 1$, alors le sev de $\mathbb{R}^n$ engendré par les lignes de M est de dimension 1 et il existe un vecteur unitaire $v \in S^{n-1}$ et une liste de réels $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ tel que $\forall i \in [\![1, n]\!], l_i(M) = \alpha_i.v$
Alors $\sqrt{\sum_{1\leq i,j\leq n} M_{i,j}^2} = \sqrt{\sum_{1\leq i,j\leq n} \alpha_i^2 v_j^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \times \|v\|} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \alpha_i^2}$.
Par ailleurs, un calcul facile donne $Mv = {}^t(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ donc
$$\sqrt{\sum_{1\leq i,j\leq n} M_{i,j}^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \alpha_i^2} = \|Mv\| \leq \|M\|_{op}$$
d'où l'égalité des deux membres car l'autre inégalité est toujours vérifiée.

7)
- L'inégalité est immédiate par conséquence de la question précédente.
- Soit A_n l'ensemble des matrices de Σ_n telles que $\|M\|_{op} = n$. Si $M \in A_n$, alors
$$n = \|M\|_{op} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{i,j}^2} \leq n,$$
donc $\|M\|_{op} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{i,j}^2} = n$, d'où on tire $\mathrm{rg}(M) \leq 1$.
Or $M \neq 0$ car $\|0\|_{op} = 0$ et $n \neq 0$. Donc $\mathrm{rg}(M) = 1$.
De plus, $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (1 - M_{i,j}^2) = 0$ et chacun des termes de cette somme nulle est un réel positif ou nul.
Donc $\boxed{\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2, M_{i,j}^2 = 1}$.
A_n est donc inclus dans l'ensemble des matrices à coefficients dans $\{-1, 1\}$ et de rang 1.
L'inclusion réciproque est immédiate (en partie conséquence de la question précédente qui donne le calcul de $\|M\|_{op}$ lorsque $\mathrm{rg}(M) \leq 1$).
- Pour construire une matrice de A_n, on choisit d'abord la première colonne : 2^n possibilités.
Cette première colonne étant non nulle, les autres colonnes de M lui sont proportionnelles, le coefficient de proportionalité étant 1 ou -1. Donc 2^{n-1} possibilités pour choisir les $n-1$ colonnes restantes.
Total : $\boxed{\mathrm{Card}(A_n) = 2^{2n-1}}$.

Partie B - Variables aléatoires sous-gaussiennes

8) Soit $t \in \mathbb{R}$. D'après le cours, on a $\mathrm{ch}\, t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)\,!}$ et $\mathrm{e}^{t^2/2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{2^n \times n\,!}$.
Soit $n \geq 1$. Pour tout $k \in [\![n+1, 2n]\!]$ on a $0 < 2 \leq k$, donc par produit il vient : $0 < 2^n \leq \frac{(2n)\,!}{n\,!}$.
Or $\frac{t^{2n}}{2^n \times (2n)\,!} \geq 0$ donc $\frac{t^{2n}}{(2n)\,!} \leq \frac{t^{2n}}{2^n \times n\,!}$ et, les séries étant convergentes :
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)\,!} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{2^n \times n\,!}.$$
Enfin, les deux termes de ces séries pour $n = 0$ sont égaux (à 1) donc $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)\,!} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{2^n n\,!}$ ce qui démontre que $\boxed{\mathrm{ch}(t) \leq \mathrm{e}^{t^2/2}}$.

9) Soit $t \in \mathbb{R}$ et $x \in [-1, 1]$.
Alors $\frac{1+x}{2}$ et $\frac{1-x}{2}$ sont deux réels positifs de somme 1.

La fonction exp étant convexe (de dérivée seconde positive) sur l'intervalle $\mathbb{R}$, intervalle contenant les deux points t et $-t$, une inégalité de convexité donne :
$\exp\left(\dfrac{1+x}{2}t+\dfrac{1-x}{2}(-t)\right)\leq\dfrac{1+x}{2}\exp(t)+\dfrac{1-x}{2}\exp(-t)$

et cette inégalité se réécrit ainsi après simplification : $\boxed{\exp(tx)\leq\dfrac{1+x}{2}\exp(t)+\dfrac{1-x}{2}\exp(-t)}$.

10) • Soit $t\in\mathbb{R}$. Posons Y la variable aléatoire $Y=\dfrac{1+X}{2}\mathrm{e}^t+\dfrac{1-X}{2}\mathrm{e}^{-t}-\exp(tX)$
Par hypothèse, X est à valeurs dans $[-1,1]$ donc Y est une variable aléatoire positive.
Par positivité et linéarité de l'espérance, et sachant que $E(X)=0$, on obtient : $\mathrm{ch}(t)-E(\exp(tX))\geq 0$
Ayant également $\mathrm{ch}(t)\leq\mathrm{e}^{t^2/2}$, on obtient $\boxed{E(\mathrm{e}^{tX})\leq\mathrm{e}^{t^2/2}}$ pour tout $t\in\mathbb{R}$ ce qui montre que X est 1-sous-gaussienne.

• Supposons maintenant que X est bornée par α, et posons $Y=\dfrac{1}{\alpha}X$. Alors Y est centrée (linéarité de l'espérance) et bornée par 1.
Soit $t\in\mathbb{R}$. Alors $\alpha\times t\in\mathbb{R}$ et d'après ce qui précède, $E(\mathrm{e}^{\alpha tY})\leq\exp((\alpha t)^2/2)$,
inégalité qui se réécrit $\boxed{E(\mathrm{e}^{tX})\leq\mathrm{e}^{\alpha^2t^2/2}}$ et fournit le caractère α-sous-gaussien de X.

11) Soit $t\in\mathbb{R}$.
L'indépendance mutuelle des variables aléatoires $X_1,\dots,X_n$ implique l'indépendance mutuelle des variables aléatoires $\mathrm{e}^{t\mu_1X_1},\dots,\mathrm{e}^{t\mu_nX_n}$. Ainsi, :

$$E\left(\exp\left(t\sum_{i=1}^n\mu_iX_i\right)\right)=E\left(\prod_{i=1}^n\exp(t\mu_iX_i)\right)=\prod_{i=1}^nE(\exp(t\mu_iX_i)).$$

Or, pour tout $i\in[\![1,n]\!]$ on a $0\leq E(\exp(t\mu_iX_i))\leq\exp(t^2\mu_i^2\alpha^2/2)$. Donc par produit :

$$E\left(\exp\left(t\sum_{i=1}^n\mu_iX_i\right)\right)\leq\prod_{i=1}^n\exp(t^2\mu_i^2\alpha^2/2)=\exp\left(\sum_{i=1}^nt^2\mu_i^2\alpha^2\right)=\exp(\alpha^2t^2/2),$$

ce qui achève de démontrer que $\underline{\sum_{i=1}^n\mu_iX_i \text{ est } \alpha\text{-sous-gaussienne.}}$

12) • Soit $t>0$.
Par conséquence de l'α-sous-gaussianité de X, e^{tX} est d'espérance finie. C'est également une variable aléatoire positive. Par ailleurs, $\mathrm{e}^{t\lambda}$ est un réel strictement positif.
Par conséquence de l'inégalité de Markov :

$$P(\mathrm{e}^{tX}\geq\mathrm{e}^{t\lambda})\leq\frac{E(\mathrm{e}^{tX})}{\mathrm{e}^{t\lambda}}\leq\exp\left(\alpha^2t^2/2-t\lambda\right),$$

car $\mathrm{e}^{t\lambda}>0$ et X est une variable aléatoire α-sous-gaussienne.
Or l'événement $\{\mathrm{e}^{tX}\geq\mathrm{e}^{t\lambda}\}$ est exactement l'événement $\{X\geq\lambda\}$ par stricte croissance de la fonction exponentielle et stricte positivité de t.
Donc $\boxed{P(X\geq\lambda)\leq\exp\left(\dfrac{\alpha^2t^2}{2}-t\lambda\right)}$.

• En choisissant $t=\dfrac{\lambda}{2\alpha}$ (qui est bien un réel strictement positif) dans l'inégalité précédente, on obtient :

$$P(X\geq\lambda)\leq\exp\left(\frac{-\lambda^2}{2\alpha^2}\right).$$

Maintenant, on vérifie facilement que $-X$ est une variable aléatoire α-sous-gaussienne.
En effet, si $t\in\mathbb{R}$, alors $-t\in\mathbb{R}$, donc $E(\exp(-tX))\leq\exp(\alpha^2(-t)^2/2)$, ce qui donne :

$$E(\exp(t(-X)))\leq\exp(\alpha^2t^2/2).$$

Ainsi, d'après ce qui précède, $P(-X\geq\lambda)\leq\exp(-\lambda^2/(2\alpha^2))$.
Enfin, l'événement $\{|X|\geq\lambda\}$ est la réunion disjointe des évènements $\{X\geq\lambda\}$ et $\{-X\geq\lambda\}$, donc la somme des deux inégalités précédemment obtenues fournit :

$$\boxed{P(|X|\geq\lambda)\leq 2\exp\left(-\frac{\lambda^2}{2\alpha^2}\right)}.$$

13) • Supposons que X est d'espérance finie.
Alors, l'inégalité $0 \leq \lfloor X \rfloor \leq X$ assure que $\lfloor X \rfloor$ est aussi d'espérance finie, et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
D'après le résultat admis, la série de terme général $P(\lfloor X \rfloor \geq k)$ converge, et est de somme $E(\lfloor X \rfloor)$.
Or, pour tout entier naturel k et par conséquence de la définition de la partie entière, l'événement $\{\lfloor X \rfloor \geq k\}$ est exactement l'événément $\{X \geq k\}$.
Donc $P(X \geq k) = P(\lfloor X \rfloor \geq k)$ ce qui assure la convergence de la série de terme général $P(X \geq k)$ et donne également $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} P(X \geq k) = E(\lfloor X \rfloor)$.
L'inégalité $\lfloor X \rfloor \leq X \leq \lfloor X \rfloor + 1$, et la croissance et la linéarité de l'espérance fournissent alors l'inégalité souhaitée (en notant que $E(1) = 1$...) :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} P(X \geq k) \leq E(X) \leq 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} P(X \geq k)}.$$

• Supposons que la série de terme général $P(X \geq k)$ converge.
Alors, ayant $P(\lfloor X \rfloor \geq k) = P(X \geq k)$ pour tout k entier et $\lfloor X \rfloor$ à valeur dans $\mathbb{N}$, la variable aléatoire $\lfloor X \rfloor$ est d'espérance finie donc $\lfloor X \rfloor + 1$ également.
Ayant $0 \leq X \leq \lfloor X \rfloor + 1$, on en déduit que X est d'espérance finie.

14) • Soit $k \geq 2$.
L'événemement $\{\exp(\beta^2 X^2/2) \geq k\}$ est exactement l'événément $\left\{|X| \geq \sqrt{\dfrac{2\ln(k)}{\beta^2}}\right\}$ par stricte croissance des fonctions qui vont bien et stricte positivité des réels qui vont bien.
Le réel $\sqrt{\dfrac{2\ln(k)}{\beta^2}}$ étant strictement positif, on peut appliquer l'inégalité de la question 12) :

$$P\left(\exp\left(\frac{\beta^2 X^2}{2}\right) \geq k\right) \leq 2\exp\left(-\frac{1}{2\alpha^2} \times \frac{2\ln(k)}{\beta^2}\right) = 2k^{-\eta},$$

en posant $\eta = \alpha^{-2}\beta^{-2}$.

• Lorsque $k = 1$, l'inégalité est évidente car elle s'écrit $P\left(\exp\left(\dfrac{\beta^2 X^2}{2}\right) \geq k\right) \leq 2$.

• En supposant $0 < \alpha\beta < 1$, on a alors $1 < (\alpha\beta)^{-2} = \eta$ par stricte décroissance de $u \mapsto u^{-2}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ ce qui assure la convergence de la série de terme général $\dfrac{1}{k^\eta}$. L'inégalité :

$$0 \leq P\left(\exp\left(\frac{\beta^2 X^2}{2}\right) \geq k\right) \leq \frac{2}{k^\eta}$$

assure alors la convergence de la série de terme général $P\left(\exp\left(\dfrac{\beta^2 X^2}{2}\right) \geq k\right)$.
D'après la question précédente, $\exp\left(\dfrac{\beta^2 X^2}{2}\right)$ est donc d'espérance finie et :

$$\begin{aligned} E\left(\exp\left(\frac{\beta^2 X^2}{2}\right)\right) &\leq 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} P\left(\exp\left(\frac{\beta^2 X^2}{2}\right) \geq k\right) \\ &\leq 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{k^\eta} \\ &= \boxed{1 + 2\zeta(\eta)}. \end{aligned}$$

Partie C - Recouvrements de la sphère

15) Raisonnons par l'absurde et supposons qu'on ne puisse pas trouver de recouvrement fini. Construisons alors par récurrence une suite (a_n) à valeurs dans K de la manière suivante :

• initialisation : puisque $K \neq \varnothing$, on peut choisir $a_0 \in K$

- supposons avoir construit $a_0, \dots, a_n$. Puisque $K \not\subset \bigcup_{k=0}^{n} B_{a_k,\varepsilon/2}$, on peut choisir :

$$a_{n+1} \in K \setminus \left(\bigcup_{k=0}^{n} B_{a_k,\varepsilon/2} \right).$$

Puis par compacité de K, on peut trouver une extraction φ telle que la suite $a_{\varphi(n)}$ tende vers une limite $a \in K$. En particulier, il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq N, \ \|a - a_{\varphi(n)}\| \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

Remarquons alors que par l'inégalité triangulaire on a $\|a_{\varphi(N+1)} - a_{\varphi(N)}\| \leq \varepsilon/2$, d'où $a_{\varphi(N+1)} \in B_{a_{\varphi(N)},\varepsilon/2}$. Or puisque $\varphi(N+1) > \varphi(N)$, par construction on a $a_{\varphi(N+1)} \notin B_{a_{\varphi(N)},\varepsilon/2}$, <u>d'où contradiction</u>.

16) On se donne un ensemble A du même type que dans la question précédente. Puisque $\Lambda \subset K$, on peut construire une application $\theta : \Lambda \to A$, qui à $x \in \Lambda$ associe un $a \in A$ tel que $x \in B_{a,\varepsilon/2}$. Montrons que θ est injective, et pour cela donnons-nous $x \neq y$ dans Λ. Si on avait $\theta(x) = \theta(y) = a$, alors par l'inégalité triangulaire on aurait :

$$\|x - y\| \leq \|x - a\| + \|a - y\| \leq \varepsilon,$$

ce qui est absurde. Ainsi, θ est bien injective. Ensuite, on peut par exemple remarquer que :

$$\Lambda = \theta^{-1}(A) = \bigcup_{a \in A} \theta^{-1}(\{a\}).$$

Or par injectivité de θ, chaque image réciproque $\theta^{-1}(\{a\})$ est soit vide, soit égale à un singleton. Dans tous les cas elle est finie. Donc comme union finie d'ensembles finis, <u>Λ est finie</u> ; son cardinal vérifie :

$$\mathrm{Card}(\Lambda) \leq \sum_{a \in A} \mathrm{Card}(\theta^{-1}(\{a\})) \leq \sum_{a \in A} 1 = \boxed{\mathrm{Card}(A)}.$$

Si Λ est de cardinal maximal, supposons que : $K \not\subset \bigcup_{a \in \Lambda} B_{a,\varepsilon}$. On pourrait alors choisir :

$$b \in K \setminus \bigcup_{a \in \Lambda} B_{a,\varepsilon} \supset K \setminus \Lambda.$$

L'ensemble $\widetilde{\Lambda} = \Lambda \cup \{b\}$ serait de cardinal strictement supérieur à $\mathrm{Card}(\Lambda)$, et vérifierait :

$$\forall (x,y) \in \widetilde{\Lambda}^2, \ x \neq y \Rightarrow \|x - y\| > \varepsilon.$$

On aurait alors une contradiction sur la maximalité de $\mathrm{Card}(\Lambda)$. Donc $\boxed{K \subset \bigcup_{a \in \Lambda} B_{a,\varepsilon}}$.

17) Soit $a \in \Lambda$, et montrons que $\boxed{B_{a,\varepsilon/2} \subset B_{0,1+\varepsilon/2}}$. Pour cela, donnons-nous $x \in B_{a,\varepsilon/2}$. Par l'inégalité triangulaire on a :

$$\|x\| \leq \|x - a\| + \|a\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + 1,$$

car $a \in S^{n-1}$. Par ailleurs, donnons-nous $a \neq b$ dans Λ et supposons qu'il existe un $x \in B_{a,\varepsilon/2} \cap B_{b,\varepsilon/2}$. Alors par l'inégalité triangulaire on aurait :

$$\|b - a\| \leq \|b - x\| + \|x - a\| \leq \varepsilon,$$

ce qui est absurde. Donc les $B_{a,\varepsilon/2}$ sont deux à deux disjointes pour $a \in \Lambda$. Puisque Λ est fini, on peut écrire :

$$\mu\left(B_{0,1+\varepsilon/2}\right) \geq \mu\left(\bigcup_{a \in \Lambda} B_{a,\varepsilon/2}\right) = \sum_{a \in \Lambda} \mu\left(B_{a,\varepsilon/2}\right).$$

On en déduit : $\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)^n \geq \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^n \times \mathrm{Card}(\Lambda)$, soit encore : $\boxed{\mathrm{Card}(\Lambda) \leq \left(\frac{2+\varepsilon}{\varepsilon}\right)^n}$.

18) Dans cette question, on fixe $\boxed{\varepsilon = \frac{1}{2}}$. Rappelons ensuite que S^{n-1} est compact (cf. question A-1)). Il est bien sûr non vide, puisqu'il contient par exemple $e_1 = {}^t(1, 0, \ldots, 0)$. On invoque ensuite les différentes questions de cette partie les unes après les autres :

- la question 15) montre qu'il existe un ensemble fini $A \subset S^{n-1}$ tel que : $S^{n-1} \subset \bigcup_{a \in A} B_{a,\varepsilon/2}$.
- puis on considère l'ensemble :

$$X = \{\text{Card}(\Lambda) / \Lambda \subset S^{n-1} \text{ et } \forall (x, y) \in \Lambda^2,\ x \neq y \Rightarrow \|x - y\| > \varepsilon\}$$

La question 16) montre qu'un tel ensemble Λ est nécessairement fini, si bien que la définition de X est légitime. De plus $\Lambda = \{e_1\}$ convient, donc l'ensemble X est non vide. Enfin, la question 16) montre qu'il est majoré, donc il admet un plus grand élément. Λ_n associé est alors de cardinal maximal, et une nouvelle invocation de la question 16) montre que :

$$\boxed{S^{n-1} \subset \bigcup_{a \in \Lambda_n} B_{a,\varepsilon}}.$$

- la question 17) montre alors que : $\boxed{\text{Card}(\Lambda) \leq \left(\frac{2 + \varepsilon}{\varepsilon}\right)^n = 5^n}$.

Partie D - Norme d'une matrice aléatoire

19) Soit $i \in [\![1, n]\!]$, et remarquons que : $y_i = \sum_{j=1}^{n} M_{i,j}^{(n)} x_j$, avec $\sum_{j=1}^{n} x_j^2 = 1$.

De plus, les variables aléatoires $(M_{i,1}^{(n)}, \ldots, M_{i,n}^{(n)})$ sont mutuellement indépendantes, car elles forment une sous-famille d'une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes.

La question B-11) montre alors immédiatement que $\underline{y_i \text{ est } \alpha\text{-sous-gaussienne}}$. L'inégalité d'Orlicz (admise à la fin de la partie B) montre alors que :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ E\left(\mathrm{e}^{\gamma y_i^2}\right) \leq 5.$$

L'indépendance mutuelle des $M_{i,j}^{(n)}$ fournit l'indépendance mutuelle des y_i, car chaque y_i s'écrit comme combinaison linéaire des $M_{i,j}^{(n)}$, et les différentes combinaisons linéaires ont des supports deux à deux disjoints. Donc par produit on obtient :

$$\boxed{E\left(\mathrm{e}^{\gamma \|y\|^2}\right) \leq 5^n}.$$

Soit maintenant $r > 0$. Par stricte croissance de l'exponentielle et stricte positivité de γ on a :

$$P(\|y\| \geq r\sqrt{n}) = P\left(\mathrm{e}^{\gamma \|y\|^2} \geq \mathrm{e}^{\gamma r^2 n}\right).$$

Puis en utilisant l'inégalité de Markov il vient : $\boxed{P(\|y\| \geq r\sqrt{n}) \leq (5\mathrm{e}^{-\gamma r^2})^n}$.

20) Il existe $t \in S^{n-1}$ tel que : $\|M^{(n)} t\| = \|M^{(n)}\|_{op}$, puis il existe $a \in \Lambda_n$ tel que : $t \in B_{a,1/2}$. Par la question A-2) il vient alors :

$$\|M^{(n)}\|_{op} \leq \|M^{(n)} t - M^{(n)} a\| + \|M^{(n)}(a)\| \leq \frac{1}{2}\|M^{(n)}\|_{op} + \|M^{(n)}(a)\|,$$

soit encore : $\|M^{(n)}(a)\| \geq \frac{1}{2}\|M^{(n)}\|_{op}$.

Maintenant, soit $r > 0$, et supposons que $\|M^{(n)}\|_{op} \geq 2r\sqrt{n}$. Alors on obtient immédiatement :

$$\boxed{\|M^{(n)}(a)\| \geq r\sqrt{n}}.$$

En écrivant :

$$\{\|M^{(n)}\|_{op} \geq 2r\sqrt{n}\} \subset \bigcup_{a\in\Lambda_n} \left\{\|M^{(n)}(a)\| \geq r\sqrt{n}\right\},$$

et en utilisant le fait que Λ_n est fini, on obtient :

$$\begin{aligned}
P(\|M^{(n)}\|_{op} \geq 2r\sqrt{n}) &\leq \sum_{a\in\Lambda_n} P\left(\|M^{(n)}(a)\| \geq r\sqrt{n}\right) \\
&\leq \sum_{a\in\Lambda_n} \left(5\mathrm{e}^{-\gamma r^2}\right)^n \qquad \text{d'après 19)} \\
&= \left(5\mathrm{e}^{-\gamma r^2}\right)^n \times \mathrm{Card}(\Lambda_n) \\
&\leq \boxed{\left(25\mathrm{e}^{-\gamma r^2}\right)^n} \qquad \text{d'après C-17).}
\end{aligned}$$