Corrigé du concours Mines Ponts 2013 - Maths 1

A. Formes bilinéaires plates

Q1. **L'unicité**. Supposons qu'ils existent $u, v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ vérifiant la propriété, alors, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \langle u(x), y\rangle = \langle v(x), y\rangle$ donc $\forall x \in \mathbb{R}^n, u(x) = v(x)$, donc $u = v$.
L'existence. Pour $x \in \mathbb{R}^n$ fixé, l'application $\delta_x : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, y \longmapsto \langle x, y\rangle$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$.
L'application $\delta : \mathbb{R}^n \longrightarrow (\mathbb{R}^n)^*, x \longmapsto \delta_x$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
Pour $x \in \mathbb{R}^n$, l'application $\varphi_x : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, y \longmapsto \varphi(x, y)$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$, il existe alors un unique vecteur $u(x) \in \mathbb{R}^n$ qui vérifie, $\varphi_x = \delta(u(x)) = \delta_{u(x)}$, alors

$$\forall y \in \mathbb{R}^n, \varphi(x, y) = \langle u(x), y\rangle$$

$\langle , \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$, c'est facile de vérifier que l'application u ainsi définie est un endomorphisme sur $\mathbb{R}^n$.
$\forall x, y \in \mathbb{R}^n\ \varphi(x, y) = \varphi(y, x)$, donc $\langle u(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle$, alors u est symétrique, et u est orthogonalement diagonalisable, il existe $\beta(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une base orthonormé de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de u, posons $u(e_i) = \lambda_i e_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$, alors
$\varphi(e_i, e_j) = \langle u(e_i), e_j\rangle = \lambda_i\langle e_i, e_j\rangle = \lambda_i\delta_{i,j}$, donc φ est diagonalisable.

Q2. Pour $x, x', y \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}(a \otimes b)(x + \lambda x', y) &= a(x + \lambda x')b(y)\\ &= a(x)b(y) + \lambda a(x')b(y)\\ &= (a \otimes b)(x, y) + \lambda(a \otimes b)(x', y)\end{aligned}$$

De même pour la linéarité à droite.
$(a \otimes b)$ est symétrique si et seulement si $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, a(x)b(y) = a(y)b(x)$.
Montrons que $(a \otimes b)$ est symétrique $\Longleftrightarrow$ la famille (a, b) est liée.
$\Longleftarrow$ C'est évident.
$\Longrightarrow$ Si $a = \theta$ ou $b = \theta$ la famille (a, b) est liée.
Si $a \neq \theta$ et $b \neq \theta$, alors $\exists y \in \mathbb{R}^n$ tel que $b(y) \neq 0$
Alors $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $a(x) = \dfrac{a(y)}{b(y)}b(x)$
Alors $\exists \lambda = \dfrac{a(y)}{b(y)} \in \mathbb{R}$ tel que : $a = \lambda b$.
La famille (a, b) est donc liée.

Q3. On prend la base de diagonalisation de la question **1**, et on peut supposer que $(\varphi(e_i, e_j)_{1\leqslant i,j\leqslant n} = diag(\lambda_1, 0, ..., 0)$ avec $\lambda_1 \neq 0$.
Pour $x = (x_1, ..., x_n)_\beta$ et $y = (y_1, ..., y_n)_\beta$, on a

$$\begin{aligned}\varphi(x, y) &= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_i y_j \varphi(e_i, e_j)\\ &= \lambda_1 x_1 y_1\end{aligned}$$

Soit $\beta^*(e_i^*)_{1\leqslant i\leqslant n}$ la base duale de la base $\beta(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$.
Si $\lambda_1 > 0$, on prend $f = \sqrt{\lambda_1}e_1^*$ et $\varphi = f \otimes f$.
Si $\lambda_1 < 0$, on prend $f = \sqrt{-\lambda_1}e_1^*$ et $\varphi = -f \otimes f$.

Q4. Pour $x, y, z, w \in \mathbb{R}^n$, ici $\langle , \rangle$ désigne le produit usuel dans $\mathbb{R}$ et $\varepsilon \in \{-1, 1\}$.

$$\begin{aligned}
\langle \varphi(x,y), \varphi(z,w)\rangle &= \varepsilon^2 (f\otimes f)(x,y).(f\otimes f)(z,w)\\
&= f(x)f(y)f(z)f(w)\\
&= f(x)f(w)f(z)f(y)\\
&= \langle \varphi(x,w), \varphi(z,y)\rangle
\end{aligned}$$

Q5. Toujours avec les notations des questions précédentes, pour tout $i \neq 1$,

$$\begin{aligned}
\langle \varphi(e_1,e_1), \varphi(e_i,e_i)\rangle &= [\varphi(e_1,e_i)]^2\\
&= 0
\end{aligned}$$

Donc $\varphi(e_i, e_i) = 0$ car $\varphi(e_1, e_1) = \lambda_1 \neq 0$, alors $\mathbf{rg}(\varphi(e_i, e_j)_{1\leqslant i,j\leqslant n}) = 1$.

B. Diagonalisation simultanée

Q6. $i_0 \in I$, si u_{i_0} n'est pas une homothétie, alors $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $u_{i_0} - \lambda \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} \neq 0$, donc $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(u_{i_0})$, $\ker(u_{i_0} - \lambda \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}) \neq \mathbb{R}^n$.
Pour tout $j \in I$, les endomorphismes u_{i_0} et u_j commutent, donc les espaces propres de u_{i_0} sont stables par u_j.

Q7. Si tous les endomorphismes u_i avec $i \in I$ sont des homothéties alors n'importe quelle base de E convient.
Supposons qu'il existe $i_0 \in I$, tel que u_{i_0} n'est pas une homothétie, u_{i_0} est auto-adjoint donc
$(*)$ $\overset{\perp}{\bigoplus\limits_{\lambda\in Sp(u_{i_0})}} E_\lambda(u_{i_0}) = E$, et $\forall \lambda \in Sp(u_{i_0}), \dim(E_\lambda(u_{i_0})) < n$ et cette somme est orthogonale.
Par application de l'hypothèse de récurrence sur chaque $E_\lambda(u_{i_0})$, il existe une base orthonormée β_λ de $E_\lambda(u_{i_0})$ qui diagonalise tous les $u'_j =$ la restriction de u_j sur $E_\lambda(u_{i_0})$, pour tout $j \in I$, car $(u'_j)_{j\in I}$ est une famille d'endomorphismes autoadjoints et commutent.
La somme $(*)$ est orthogonale, donc $\beta = \bigcup\limits_{\lambda\in Sp(u_{i_0})} \beta_\lambda$ est une base orthonormée de E, qui diagonalise tous les u_j, avec $j \in I$

C. Vecteurs réguliers

Q8. Supposons que B est inversible alors,

$$\begin{aligned}
\det(A+tB) &= \det B \det(B^{-1}A + tI_n)\\
&= (\det B)\chi_{B^{-1}A}(-t)
\end{aligned}$$

$\chi_{B^{-1}A}$ désigne le polynôme caractéristique de $B^{-1}A$.
Donc $A + tB$ est inversible si et seulement si $-t \notin Sp(B^{-1}A)$, l'ensemble $Sp(B^{-1}A)$ est évidement fini.
Supposons que A est inversible alors pour tout $t \neq 0$,

$$\begin{aligned}
\det(A+tB) &= \det A \det(I_n + tA^{-1}B)\\
&= (\det A)t^n\chi_{A^{-1}B}(-1/t)
\end{aligned}$$

Donc $A + tB$ est inversible si et seulement si[($t \neq 0$ et $-1/t \notin Sp(B^{-1}A)$) ou $t = 0$].

Q9. La famille $(a_1, ..., a_r)$ est libre de $\mathbb{R}^p$, par application du théorème de la base incomplète, il existe une famille $(a_{r+1}, ..., a_p)$ telle que $(a_1, ..., a_p)$ soit une base de $\mathbb{R}^p$, posons β la base canonique de $\mathbb{R}^p$, $A = \mathbf{mat}_\beta(a_1, ..., a_p)$ et $B = \mathbf{mat}_\beta(b_1, ..., b_r, 0, ..., 0)$.
La matrice A est inversible. Par application de la question précédente $A + tB$ est inversible pour tout réel t sauf éventuellement pour un nombre fini de valeurs de t.
Par conséquent $(a_1 + tb_1, ..., a_r + tb_r)$ est également libre pour tout réel t sauf éventuellement pour un nombre fini de valeurs de t.

Q10. $\dim \mathrm{Im}\widetilde{\varphi}(v) = q$, il existe $(e_1, ..., e_q) \in \mathbb{R}^n$ telle que $(\widetilde{\varphi}(v)(e_1), ..., \widetilde{\varphi}(v)(e_q))$ soit une base de $\mathrm{Im}\widetilde{\varphi}(v)$.

Supposons que le vecteur $\varphi(x, y) \notin \mathrm{Im}\widetilde{\varphi}(v)$, alors la famille $(\widetilde{\varphi}(v)(e_1), ..., \widetilde{\varphi}(v)(e_q), \varphi(x, y))$ est libre. Par application de la question précédente :

la famille $(\widetilde{\varphi}(v)(e_1) + t\varphi(x, e_1), ..., \widetilde{\varphi}(v)(e_q) + t\varphi(x, e_q), \varphi(x, y) + t.0)$ est libre pour t voisin de 0.

c'est à dire $(\varphi(v + tx, e_1), ..., \varphi(v + tx, e_q), \varphi(x, y))$ est libre pour t voisin de 0.

Alors $(\varphi(\frac{1}{t}v + x, e_1), ..., \varphi(\frac{1}{t}v + x, e_q), \frac{1}{t}\varphi(x, y))$ est libre pour t voisin de 0.

Par conséquent puisque $y \in \mathrm{Im}\widetilde{\varphi}(v)$ c'est à dire $\varphi(v, y) = 0 = \varphi\left(\frac{v}{t}, \frac{y}{t}\right)$, la famille

$$(\varphi(\frac{1}{t}v + x, e_1), ..., \varphi(\frac{1}{t}v + x, e_q), \frac{1}{t}\varphi(x, y) + \varphi\left(\frac{v}{t}, \frac{y}{t}\right))$$

est libre pour t voisin de 0.

Puisque $\frac{1}{t}\varphi(x, y) + \varphi\left(\frac{v}{t}, \frac{y}{t}\right) = \varphi(x + \frac{1}{t}v, \frac{1}{t}y)$, alors

La famille $(\varphi(\frac{1}{t}v + x, e_1), ..., \varphi(\frac{1}{t}v + x, e_q), \varphi(x + \frac{1}{t}v, \frac{1}{t}y)$ d'éléments de $\mathrm{Im}\widetilde{\varphi}(\frac{1}{t}v + x)$ est libre de cardinale $q + 1$, absurde avec la définition de q.

Donc $\forall y \in \ker \widetilde{\varphi}(v)$, $\varphi(x, y) \notin \mathrm{Im}\widetilde{\varphi}(v)$

Q11. Soit $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} x \in \ker \varphi &\Longrightarrow \forall y \in \mathbb{R}^n, \varphi(x, y) = 0 \\ &\Longrightarrow \varphi(v, x) = 0 \\ &\Longrightarrow \widetilde{\varphi}(v)(x) = 0 \\ &\Longrightarrow x \in \ker \widetilde{\varphi}(v) \end{aligned}$$

Donc $\ker(\varphi) \subset \ker \widetilde{\varphi}(v)$

Soit $x, y \in \mathbb{R}^n$, de la question **10.**

$$\begin{aligned} y \in \ker \widetilde{\varphi}(v) &\Longrightarrow \varphi(x, y) \in \mathrm{Im}\widetilde{\varphi}(v) \\ &\Longrightarrow \exists x' \in \mathbb{R}^n \,/\, \varphi(x, y) = \widetilde{\varphi}(v)(x') \end{aligned}$$

Supposons que $y \in \ker \widetilde{\varphi}(v)$, alors

$$\begin{aligned} \langle \varphi(x, y), \varphi(x, y) \rangle &= \langle \varphi(x, y), \varphi(v, x') \rangle \\ &= \langle \varphi(x, x'), \varphi(v, y) \rangle \\ &= 0 \text{ car } y \in \ker \widetilde{\varphi}(v) \end{aligned}$$

Donc $\|\varphi(x, y)\| = 0$ c'est à dire que $\varphi(x, y) = 0$, alors $y \in \ker \varphi$

Donc $\ker \widetilde{\varphi}(v) \subset \ker \varphi$, alors $\ker \widetilde{\varphi}(v) = \ker \varphi$

Si $\ker \varphi = \{0\}$, alors $\ker \widetilde{\varphi}(v) = \{0\}$.

$\dim \ker \widetilde{\varphi}(v) + \dim \mathrm{Im}\widetilde{\varphi}(v) = n$ entraîne $n = \dim \mathrm{Im}\widetilde{\varphi}(v)$ et $\mathrm{Im}\widetilde{\varphi}(v) \subset \mathbb{R}^p$, alors $n \leqslant p$.

Q12. Soit $v \in \mathcal{V}$, posons $\mathrm{Im}\widetilde{\varphi}(v) = \mathrm{vect}(\widetilde{\varphi}(v)(e_1), ..., \widetilde{\varphi}(v)(e_q))$

Donc la famille $(\varphi(v, e_1), ..., (\varphi(v, e_q))$ est libre de $\mathbb{R}^p$, soit $u \in \mathbb{R}^p$ tel que $\|u\| = 1$, de la question **9.** la famille $(\varphi(v, e_1) + t\varphi(u, e_1), ..., (\varphi(v, e_q) + t\varphi(u, e_q)) = (\varphi(v + tu, e_1), ..., \varphi(v + tu, e_q))$ est libre pour tout réel t sauf éventuellement pour un nombre fini de valeurs de t.

Alors la famille $(\widetilde{\varphi}(v + tu)(e_1), ..., \widetilde{\varphi}(v + tu)(e_q))$ de $\mathrm{Im}\widetilde{\varphi}(v + tu)$ est libre pour tout réel t sauf éventuellement pour un nombre fini de valeurs de t.

Par conséquent $v + tu \in \mathcal{V}$ pour tout réel t sauf éventuellement pour un nombre fini de valeurs de t, donc $\exists \varepsilon > 0$ tel que $B(v, \varepsilon) \subset \mathcal{V}$.

L'ensemble $\mathcal{V}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Q13. Avec les notations de la question **12.** $\mathbf{Im}\widetilde{\varphi}(v) = \mathbf{vect}(\widetilde{\varphi}(v)(e_1), ..., \widetilde{\varphi}(v)(e_q))$

Alors pour tout $t \neq 0$, la famille $(\widetilde{\varphi}(tv)(e_1), ..., \widetilde{\varphi}(tv)(e_q))$ est libre de $\mathbf{Im}\widetilde{\varphi}(v)$ car φ est bilinéaire.

Soit $u \in \mathbb{R}^n$, par application de la question **9.**

la famille $(\varphi(tv, e_1) + t'\varphi(u, e_1), ..., \varphi(tv, e_q) + t'\varphi(u, e_q)) = (\varphi(tv + t'u, e_1), ..., \varphi(tv + t'u, e_q))$ est libre pour tout réel t' sauf éventuellement pour un nombre fini de valeurs de t', comme elle est de cardinal q alors $tv + t'u \in \mathcal{V}$

De plus $\|tv + t'u - u\| \leqslant |t| \|v\| + |t' - 1| \|u\|$ cette dernière quantité tend vers 0 lorsque t est proche de 0 et t' est proche de 1.

L'ensemble $\mathcal{V}$ est dense dans $\mathbb{R}^n$.

D. Le cas $p = n$ de noyau nul

Q14. Si $\ker \varphi = \{0\}$ alors $\ker \widetilde{\varphi}(v) = \{0\}$ c'est la question **11.**

Donc $\dim \mathrm{Im}\widetilde{\varphi}(v) = n$, l'application $\widetilde{\varphi}(v)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, qui est surjectif, il est donc bijectif.

$\widetilde{\varphi}(v)$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^n$.

Q15. Soient $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, $\exists z' \in \mathbb{R}^n$ tel que $\widetilde{\varphi}(v)(z') = z$.

$$\begin{aligned}
\langle \psi(x)(y), z\rangle &= \langle \widetilde{\varphi}(x) \circ \widetilde{\varphi}(v)^{-1}(y), z\rangle \\
&= \langle \varphi(x, \widetilde{\varphi}(v)^{-1}(y)), z\rangle \\
&= \langle \varphi(x, \widetilde{\varphi}(v)^{-1}(y)), \varphi(v, z')\rangle \\
&= \langle \varphi(x, z'), \varphi(\widetilde{\varphi}(v)^{-1}(y), v)\rangle \quad \text{car } \varphi \text{ est plate} \\
&= \langle \varphi(x, z'), \widetilde{\varphi}(v) \circ \widetilde{\varphi}(v)^{-1}(y)\rangle \\
&= \langle \varphi(x, z'), y\rangle
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\langle y, \psi(x)(z)\rangle &= \langle y, \widetilde{\varphi}(x) \circ \widetilde{\varphi}^{-1}(v)(z)\rangle \\
&= \langle y, \widetilde{\varphi}(x)(z')\rangle \\
&= \langle y, \varphi(x, z')\rangle
\end{aligned}$$

Conclusion $\langle y, \psi(x)(z)\rangle = \langle \psi(x)(y), z\rangle$ et $\psi(x)$ est auto-adjoint.

Q16. Soient $x, y, z, t \in \mathbb{R}^n$, Montrons que

$$\langle \psi(x) \circ \psi(y)(t), z\rangle = \langle \psi(y) \circ \psi(x)(t), z\rangle$$

En posant $\widetilde{\varphi}(v)^{-1}(t) = t'$, $\widetilde{\varphi}(v)^{-1}(z) = z'$

$$\begin{aligned}
\langle \psi(x) \circ \psi(y)(t), z\rangle &= \langle \psi(y)(t), \psi(x)z\rangle \quad \text{car } \psi(x) \text{ est auto-adjoint} \\
&= \langle \widetilde{\varphi}(y)(t'), \widetilde{\varphi}(x)(z')\rangle \\
&= \langle \varphi(y, t'), \varphi(x, z')\rangle \\
&= \langle \varphi(y, z'), \varphi(x, t')\rangle \quad \text{car } \varphi \text{ est plate} \\
&= \langle \psi(y)(z), \psi(x)(t)\rangle \\
&= \langle z, \psi(y) \circ \psi(x)(t)\rangle \quad \text{car } \psi(y) \text{ est auto-adjoint} \\
&= \langle \psi(y) \circ \psi(x)(t), z\rangle \quad \text{car } \langle , \rangle \text{ est un produit scalaire}
\end{aligned}$$

Alors

$$\psi(x) \circ \psi(y) = \psi(y) \circ \psi(x)$$

La famille $\psi(x)_{x \in \mathbb{R}^n}$ d'endomorphismes de l'espace euclidien autoadjoints qui commutent , donc par application de la question **7.** il existe une base orthonormée $(e_1, ..., e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ qui diagonalise simultanément tous les endomorphismes $\psi(x)$.

Q17. La famille $(e_1, ..., e_n)$ étant celle de la question **16.**, posons pour tout $i \in \{1, .., n\}$: $e'_i = \widetilde{\varphi}(v)(e_i)$.
La famille $(e'_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}^n$, car $\widetilde{\varphi}(v)$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^n$.
Montrons que la base $(e'_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ diagonalise φ.
Soient $i \neq j \in \{1, ..., n\}$.

$$\begin{aligned} \varphi(e'_i, e'_j) &= \widetilde{\varphi}(e'_i)(e'_j) \\ &= \widetilde{\varphi}(e'_i) \circ \widetilde{\varphi}(v)^{-1}(e_j) \\ &= \psi(e'_i)(e_j) \end{aligned}$$

ce dernier vecteur est colinéaire à e_j
D'autre part

$$\begin{aligned} \varphi(e'_j, e'_i) &= \widetilde{\varphi}(e'_j)(e'_i) \\ &= \widetilde{\varphi}(e'_j) \circ \widetilde{\varphi}(v)^{-1}(e_i) \\ &= \psi(e'_j)(e_i) \end{aligned}$$

Ce dernier vecteur est colinéaire à e_i
Mais $\varphi(e'_j, e'_i) = \varphi(e'_i, e'_j)$ car φ est symétrique et la famille (e'_i, e'_j) est libre donc le vecteur $\varphi(e'_i, e'_j)$ est nul.
Conclusion : la base $(e'_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ diagonalise φ.

Je tiens à remercier l'élève Ibrahim Benjelloun du lycée My Driss Fès qui a donné son aide pour la réalisation de ce document

---

sadikoulmeki@yahoo.fr