CORRIGÉ : MATH 1 ; MP ; Mines-ponts_2011

A. Décomposition de Dunford

1) $P(X) = \prod_{i=1}^{r} P_i(X)$ et les $P_i(X)$ sont deux à deux premiers entre eux.

D'aprés le théorème de décomposition des noyaux : $\ker(P(f)) = \bigoplus_{i=1}^{r} \ker(P_i(f)) = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i$.

Mais d'aprés le théorème de Cayley-Hamilton : $P(f) = 0$. D'où $E = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i$.

2) $P_i \in \mathbb{C}[X]$, alors $F_i = \ker(P_i(f))$ est stable par f.
Pour tout $i \in [[1,r]]$, F_i n'est pas réduit à $\{0\}$, car λ_i est une valeur propre de f, et donc F_i contient au moins un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ_i.
Toute valeur propre de f_i est racine de P_i, et la seule racine de P_i est λ_i, alors la Polynôme caractéristique de f_i est de la forme : $(\lambda_i - X)^{\beta_i}$.
Pour chaque $i \in [[1,r]]$, soit B_i une base de F_i et A_i la matrice de f_i dans la base B_i.
La matrice de f dans la base $B = (B_1,\ldots,B_r)$ adaptée à la somme directe : $E = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i$,

est la matrice diagonale par blocs : $M = diag(A_1,\ldots,A_r)$.
Le polynôme caractéristique de f est celui de M donné donc par : $P = \prod_{i=1}^{r} Q_i(X)$

avec Q_i le polynôme caractéristique de A_i, c'est à dire de f_i.
D'où $P = \prod_{i=1}^{r} (\lambda_i - X)^{\beta_i} = \prod_{i=1}^{r} (\lambda_i - X)^{\alpha_i}$, mais les λ_i sont deux à deux distinctes, alors par

unicité des multiplicités des racines de P, on a : $\alpha_i = \beta_i$ pour tout $i \in [[1,r]]$.
Finalement : pour tout $i \in [[1,r]]$, le polynôme caractéristique de f_i est $P_i = (\lambda_i - X)^{\alpha_i}$.

3) Pour chaque $i \in [[1,r]]$, le polynôme caractéristique de f_i est $P_i = (\lambda_i - X)^{\alpha_i}$, qui est en particulier scindé sur $\mathbb{C}$, donc f_i est trigonalisable, et il existe une base B_i de F_i dans laquelle la matrice de f_i est une matrice A_i triangulaire supérieure, et puisque la seule valeur propre de f_i est λ_i, A_i est de la forme : $A_i = \lambda_i I_{\alpha_i} + N_i$ avec N_i triangulaire supérieure à diagonale nulle, donc N_i est nilpotente.

$B = (B_1,\ldots,B_r)$ est une base de E, adaptée à la somme directe : $E = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i$.

La matrice de f dans cette base est $M = diag(A_1,\ldots,A_r) = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{\alpha_1} + N_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_r I_{\alpha_r} + N_r \end{pmatrix}$.

D'où A est semblable à une matrice $A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{\alpha_1} + N_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_r I_{\alpha_r} + N_r \end{pmatrix}$.

où $N_i \in M_{\alpha_i}(\mathbb{C})$ est nilpotente pour tout $i \in [[1,r]]$.

en particulier il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que : $P^{-1}AP = A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{\alpha_1} + N_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_r I_{\alpha_r} + N_r \end{pmatrix}$.

4) Sous les notations de la question précèdente, on pose :
$D' = diag(\lambda_1 I_{\alpha_1}, \dots, \lambda_r I_{\alpha_r})$ qui est une matrice diagonale par blocs, et diagonale.
$N' = diag(N_1, \dots, N_r)$ qui est diagonale par blocs et nilpotente. $(N'^n = diag(N_1^n, \dots, N_r^n) = 0)$
et on a : $A = P(D' + N')P^{-1} = D + N$ où $D = PD'P^{-1}$ qui est une matrice diagonalisable, et
$N = PN'P^{-1}$ qui est nilpotente, puisque : $N^n = PN'^n P^{-1} = 0$.
Il reste juste à vérifier que $DN = ND$.
Remarquons d'abord que $D'N' = N'D'$. (faire le produit par blocs)
$DN = PD'P^{-1}PN'P^{-1} = PD'N'P^{-1} = PN'D'P^{-1} = PN'P^{-1}PD'P^{-1} = ND$.

N.B :
La décomposition $A = D + N$, ci dessus est dite la décomposition de Dunford de la matrice A.
On admettra dans la suite que les matrices D et N sont uniques et ne dépendent que de A.

5) Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ 2 & -\lambda & 1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \underset{C_1 \leftarrow C_1 + C_2 \;;\; C_3 \leftarrow C_3 + C_2}{\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ 2-\lambda & -\lambda & 1-\lambda \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix}} = (2-\lambda)(1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\chi_A(\lambda) = (2-\lambda)\ (1-\lambda) \underset{C_2 \leftarrow C_2 + C_1}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}} = (2-\lambda)^2(1-\lambda).$$

a) Cherchons $E_2(A)$ le sous espace propre de A associé à la valeur propre 2.

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y + z = 2x \\ 2x + z = 2y \\ x - y + 2z = 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x - 2y + z = 0 \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}$$

$$E_2(A) = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

b) Cherchons $\ker((A - 2I_3)^2)$.

$$(A-2I_3)^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\ker((A-2I_3)^2)$ est le plan d'équation $x = y$ et donc $\ker((A-2I_3)^2) = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{C}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c) Cherchons $E_1(A)$ le sous espace propre de A associé à la valeur propre 1.

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y + z = x \\ 2x + z = y \\ x - y + 2z = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases}.$$

$$E_1(A) = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

d) $A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Posons alors $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On a : $A = PTP^{-1}$.

Selon l'étude précèdente on a : $D = P\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1}$ et $N = P\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}$.

Tout calcul fait : $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$; $N = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

B. Commutation et conjugaison

Pour toutes matrices B de $M_n(\mathbb{C})$ et P de $GL_n(\mathbb{C})$, on note $comm_B$ et $conj_P$ les endomorphismes de $M_n(\mathbb{C})$ définis par : $\forall X \in M_n(\mathbb{C})$; $\begin{cases} comm_B(X) = BX - XB \\ conj_P = PXP^{-1} \end{cases}$.

On se propose dans cette partie de démontrer que pour toute matrice A de $M_n(\mathbb{C})$, A est diagonalisable si et seulement si $comm_A$ est diagonalisable.

6) Soient $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et $A, X \in M_n(\mathbb{C})$.

$conj_{P^{-1}} \circ comm_A \circ conj_P(X) = conj_{P^{-1}} \circ comm_A(PXP^{-1}) = conj_{P^{-1}}(APXP^{-1} - PXP^{-1}A)$

$conj_{P^{-1}} \circ comm_A \circ conj_P(X) = P^{-1}(APXP^{-1} - PXP^{-1}A)P = P^{-1}APX - XP^{-1}AP = comm_{P^{-1}AP}(X)$

D'où : $conj_{P^{-1}} \circ comm_A \circ conj_P = comm_{P^{-1}AP}$

7) Soit A une matrice diagonale : $A = \sum_{k=1}^{n} \mu_k E_{k,k}$.

$\forall i,j \in [[1,n]]$; $AE_{i,j} = \mu_i E_{i,i} E_{i,j} = \mu_i E_{i,j}$; $E_{i,j}A = E_{i,j}\mu_j E_{j,j} = \mu_j E_{i,j}$; $comm_A(E_{i,j}) = (\mu_i - \mu_j)E_{i,j}$.
D'où $\forall i,j \in [[1,n]]$; $E_{i,j}$ est un vecteur propre de $comm_A$ associé à la valeur propre $(\mu_i - \mu_j)$.
$(E_{i,j})_{i,j \in [[1,n]]}$ est une base de vecteurs propres de $comm_A$, alors $comm_A$ est diagonalisable et son spectre est $sp(comm_A) = \{\lambda - \mu \quad tq \quad \lambda, \mu \in sp(A)\}$.

8) On suppose ici que A est diagonalisable, il existe D une matrice diagonale et P une matrice inversible telles que : $A = PDP^{-1}$; D'aprés 6) $comm_A = conj_P \circ comm_D \circ conj_{P^{-1}}$.
$conj_P$ est un automorphisme de $M_n(\mathbb{C})$ et $(conj_P)^{-1} = conj_{P^{-1}}$.
De plus d'aprés la question précèdente, $comm_D$ est diagonalisable.
D'où $comm_A$ est diagonalisable.

9) On suppose que A est nilpotente, donc il existe un entier non nul k tel que : $A^k = 0$.
$\forall X \in M_n(\mathbb{C})$; $comm_A(X) = AX - XA$; $comm_A^2(X) = A(AX - XA) - (AX - XA)A = A^2X - 2AXA + XA^2$.
Par récurrence sur $p \in \mathbb{N}^*$, on montre que : $\forall X \in M_n(\mathbb{C})$; $comm_A^p(X) = \sum_{j=0}^{p} (-1)^j C_p^j A^{p-j} X A^j$.
Cette formule est vraie pour $p = 1$. soit $p \in \mathbb{N}^*$ tel que l'égalité ci dessus est vérifiée.
$\forall X \in M_n(\mathbb{C})$; $comm_A^{p+1}(X) = \sum_{j=0}^{p} (-1)^j C_p^j A^{p+1-j} X A^j - \sum_{j=0}^{p} (-1)^j C_p^j A^{p-j} X A^{j+1}$
$comm_A^{p+1}(X) = A^{p+1-j}X + \sum_{j=1}^{p} (-1)^j C_p^j A^{p+1-j} X A^j + \sum_{j=1}^{p} (-1)^j C_p^{j-1} A^{p+1-j} X A^j + (-1)^{p+1} X A^{p+1}$
$comm_A^{p+1}(X) = A^{p+1-j}X + \sum_{j=1}^{p} (-1)^j \left(C_p^j + C_p^{j-1}\right) A^{p+1-j} X A^j + (-1)^{p+1} X A^{p+1}$
comme $C_p^j + C_p^{j-1} = C_{p+1}^j$, on obtient le résultat cherché :
$\forall p \in \mathbb{N}^*$; $\forall X \in M_n(\mathbb{C})$; $comm_A^p(X) = \sum_{j=0}^{p} (-1)^j C_p^j A^{p-j} X A^j$.
$\forall X \in M_n(\mathbb{C})$; $comm_A^{2k}(X) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j C_{2k}^j A^{2k-j} X A^j = 0$ (car $\forall j \in [[0,2k]]$; $j \geq k$ ou $(2k - j) \geq k$).
$comm_A^{2k}$ est l'endomorphisme nul de $M_n(\mathbb{C})$.
Finalement : $comm_A$ est nilpotent dés que A est nilpotente.

10) On suppose que A est nilpotente et que $comm_A$ est l'endomorphisme nul de $M_n(\mathbb{C})$.
$\forall X \in M_n(\mathbb{C})$; $AX = XA$. Posons $A = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_{k,l} E_{k,l}$.

$\forall i,j \in [[1,n]]$; $AE_{i,j} = E_{i,j}A = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i} E_{k,j} = \sum_{l=1}^{n} a_{j,l} E_{i,l}$.
Comme $(E_{i,j})_{i,j \in [[1,n]]}$ est une base de $M_n(\mathbb{C})$, pour $k \neq i$, $a_{k,i} = 0$, alors A est une matrice diagonale, et comme A est nilpotente, on déduit que A est nulle.

11) Posons $A = D + N$, avec D diagonalisable et N nilpotente et $DN = ND$.
$\forall X \in M_n(\mathbb{C})$; $comm_A(X) = AX - XA = DX - XD + NX - XN = comm_D(X) + comm_N(X)$.
$comm_A = comm_D + comm_N$.
$comm_D$ est diagonalisable d'aprés 8) et $comm_N$ est nilpotente d'aprés 9).
$\forall X \in M_n(\mathbb{C})$; $comm_D \circ comm_N(X) = D(NX - XN) - (NX - XN)D = DNX - DXN - NXD - XND$
Comme $ND = DN$; $\forall X \in M_n(\mathbb{C})$; $comm_D \circ comm_N(X) = NDX - NXD - DXN - XDN$
$\forall X \in M_n(\mathbb{C})$; $comm_D \circ comm_N(X) = N(DX - XD) - (DX - XD)N = comm_N \circ comm_D(X)$.
D'où la décomposition de Dunford de $comm_A$ est $comm_A = comm_D + comm_N$.

conclusion :
$comm_A$ est diagonalisable si et seulement si $comm_N$ est l'endomorphisme nul de $M_n(\mathbb{C})$.
alors d'aprés 10) on a :
$comm_A$ est diagonalisable si et seulement si $N = 0$ si et seulement $A = D$ est diagonalisable.

C. Formes bilinéaires sur un espace vectoriel complexe

Ici E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $p \in \mathbb{N}^*$ et b une forme bilinéaire symétrique sur E.
Pour tout sous espace vectoriel F de E, on appelle orthogonal de F relativement à b, le sous espace vectoriel de E défini par : $F^\perp = \{x \in E \text{ tq } \forall y \in F \; ; b(x,y) = 0\}$.
On suppose que b est non dégénérée, c'est à dire que $E^\perp = \{0\}$.

12) Soit u un endomorphisme de E. Démontrons les implications suivantes :
(i) u est diagonalisable $\Rightarrow$ (ii) $\ker(u) = \ker(u^2) \Rightarrow (iii) \ker(u) \cap \mathrm{Im}(u) = \{0\}$.

$\boxed{(i) \Rightarrow (ii)}$ Soient B une base de E formée de vecteurs propres de u, et A la matrice de u dans cette base. Puisque A est diagonale, alors A et A^2 ont le même rang qui est le nombre d'éléments non nuls sur leurs diagonales.
$rg(u) = rg(u^2)$ alors d'aprés le théorème du rang, $\dim(\ker(u)) = \dim(\ker(u^2))$.
et puisque $\ker(u) \subset \ker(u^2)$, alors : $\ker(u) = \ker(u^2)$.

$\boxed{(ii) \Rightarrow (iii)}$ Supposons que $\ker(u) = \ker(u^2)$, et soit $y \in \ker(u) \cap \mathrm{Im}(u)$.
Il existe $x \in E$ tel que : $y = u(x)$ et $u(y) = u^2(x) = 0$, alors $x \in \ker(u^2) = \ker(u)$ et $y = u(x) = 0$.

Soit F un sous espace vectoriel de E, de dimension q, et soit $(\varepsilon_1, \ldots \varepsilon_q)$ une base de F.
Pour tout $i \in [[1,q]]$, on note φ_i la forme linéaire définie sur E par : $\forall x \in E \; ; \; \varphi_i(x) = b(\varepsilon_i, x)$.
13) Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_q \in \mathbb{C}$ tels que : $\sum_{i=1}^{q} \alpha_i \varphi_i = 0$.

$$\forall x \in E \; ; \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \varphi_i(x) = 0 = \sum_{i=1}^{q} \alpha_i b(\varepsilon_i x) = b(\sum_{i=1}^{q} \alpha_i \varepsilon_i, x)$$

b est non dégénérée alors $\sum_{i=1}^{q} \alpha_i \varepsilon_i = 0$ et puisque $(\varepsilon_1, \ldots \varepsilon_q)$ est libre, alors : $\alpha_1 = \ldots = \alpha_q = 0$.

On commpléte en une base $(\varphi_1, \ldots, \varphi_p)$ de E^* est on note $(e_1, \ldots e_p)$ sa base antiduale.
14) Soit $x = \sum_{i=1}^{p} x_i e_i \in E^*$. puisque $(\varepsilon_1, \ldots \varepsilon_q)$ est une base de F, on a :
$x \in F^\perp \Leftrightarrow \forall y \in F \; ; \; b(x,y) = 0 \Leftrightarrow \forall i \in [[1,q]] \; ; b(\varepsilon_i, x) = 0 = \varphi_i(x) = x_i$
$x \in F^\perp \Leftrightarrow \forall i \in [[1,q]] \; ; \; x_i = 0 \Leftrightarrow x \in vect(e_{q+1}, \ldots, e_p)$.
Finalement $F^\perp = vect(e_{q+1}, \ldots, e_p)$ est de dimension $(p-q)$ et $\dim(F) + \dim(F^\perp) = p$.

D. Critère de Klarès

Le but de cette partie est de démontrer que A est diagonalisable si et seulement si $\ker(comm_A) = \ker((comm_A)^2)$.

15) C'est clair que l'application $[(X,Y) \mapsto tr(XY)]$ est une forme bilinéaire symétrique sur $M_n(\mathbb{C})$.
Montrons qu'elle est non dégénérée.
Soit $X \in M_n(\mathbb{C})$ telle que : $\forall Y \in M_n(\mathbb{C}) \; ; \; tr(XY) = 0$.
Posons : $X = (x_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$ et $Y = X^* = {}^t\overline{X}$.
$tr(XX^*) = 0 = \sum_{1 \le i,j \le n} |x_{i,j}|^2$, alors $\forall i,j \in [[1,n]]$; $x_{i,j} = 0$ et X est la matrice nulle.

16) Soient $X \in \ker(comm_A)$ et $Y \in \operatorname{Im}(comm_A)$, il existe $Z \in M_n(\mathbb{C})$ tel que : $Y = AZ - ZA$.
$tr(XY) = tr(XAZ - XZA) = tr(XAZ) - tr(XZA)$.
comme $tr(XZA) = tr(ZAX)$ et $AX = XA$ alors : $tr(XZA) = tr(ZXA) = tr(XAZ)$. D'où $tr(XY) = 0$.
$\operatorname{Im}(comm_A) \subset (\ker(comm_A))^{\perp}$.
D'aprés le théorème du rang et d'aprés la question 14) on a :
$\dim(\operatorname{Im}(comm_A)) = \dim((\ker(comm_A))^{\perp}) = n^2 - \dim(\ker(comm_A))$.
D'où l'égalité : $\operatorname{Im}(comm_A) = (\ker(comm_A))^{\perp}$.

17) On suppose que A est nilpotente, Soit $Y \in \ker(comm_A)$, alors $AY = YA$.
Il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que : $A^k = 0$, alors : $(AY)^k = A^kY^k = 0$, alors AY est nilpotente, et $tr(AY) = 0$.
Alors $A \in (\ker(comm_A))^{\perp} = \operatorname{Im}(comm_A)$, c'est à dire il existe $X \in M_n(\mathbb{C})$ tel que : $A = comm_A(X)$.
$\forall \lambda \in \mathbb{C}$; $comm_{A+\lambda I_n}(X) = comm_A(X) = A$.

Soient D et N les matrices de la décomposition de Dunford de A.
18) D'aprés 3) il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que : $P^{-1}AP$ soit de la forme :

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{\alpha_1} + N_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_r I_{\alpha_r} + N_r \end{pmatrix}$$

avec $N_i \in M_{\alpha_i}(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente, pour tout $i \in [[1, r]]$.
D'aprés 17) $\forall i \in [[1, r]]$; $\exists X_i \in M_{\alpha_i}(\mathbb{C})$ tel que : $comm_{\lambda_i I_{\alpha_i} + N_i}(X_i) = N_i$.
On a $N' = diag(N_1, \dots, N_r)$; $D' = diag(\lambda_1 I_{\alpha_1}, \dots, \lambda_r I_{\alpha_r})$ et posons $X' = diag(X_1, \dots, X_r)$.
$comm_{A'}(X') = N'$. Or $N' = P^{-1}NP$ et posons : $X = PX'P^{-1}$. Alors
$comm_{P^{-1}AP}(P^{-1}XP) = P^{-1}NP$, c'est à dire : $comm_A(X) = N$.

19) Si A est diagonalisable, alors d'aprés 8) $comm_A$ l'est aussi et donc d'aprés 12)
$\ker(comm_A) = \ker((comm_A)^2)$.
Supposons réciproquement que $\ker(comm_A) = \ker((comm_A)^2)$.
Encore d'aprés 12) $\ker(comm_A) \cap \operatorname{Im}(comm_A) = \{0\}$.
$N = comm_A(X) \in \operatorname{Im}(comm_A)$.
Comme $ND = DN$, alors $comm_A(N) = 0$ et $N \in \ker(comm_A) \cap \operatorname{Im}(comm_A) = \{0\}$.
Finalement $A = D$ est une matrice diagonalisable.