Corrigé de la seconde épreuve de mathématiques
Mines 2010 - Filière MP
Par H. Maarouf CPGE Mohammedia

A. Questions préliminaires

1) Pour $n = 2$, la seule matrice de $\mathfrak{U}_2$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad u_2 = 1$$

Pour $n = 3$, chaque d'une matrice de $\mathfrak{U}_3$ contient un seul zéro dans chaque ligne et chaque colonne. Les matrices de $\mathfrak{U}_3$ sont donc données ci-dessous dans l'ordre suivant :

∗ Les matrices ayant un zéro dans la position $(1, 1)$:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

∗ Les matrices ayant un zéro dans la position $(1, 2)$:

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

∗ Les matrices ayant un zéro dans la position $(1, 3)$:

$$A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Enfin, $\mathfrak{U}_3$ contient exactement $u_3 = 6$ matrices.

Soit X_0 le vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont tous les coefficients sont égaux à 1 et J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

2) Soit $A \in \mathfrak{U}_n$. AX_0 est le vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont la i-ème composante ($i \in [\![1, n]\!]$) est formée de la somme des coefficients de la i-ème ligne de A, c'est-à-dire 2. En d'autres termes, $AX_0 = 2X_0$ ou, encore, X_0 est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 2.

On note $\mathcal{H}_n$ l'ensemble des éléments de $\mathfrak{U}_n$ comportant un 1 dans la position $(1, 1)$ et h_n son cardinal.

3) Commençons par remarquer que si i et j sont deux indices distincts entre 1 et n et A un élément de $\mathfrak{U}_n$, alors l'échange des lignes i et j ou des colonnes i et j donne comme résultat une nouvelle matrice de $\mathfrak{U}_n$. Fixons un couple (i, j). L'ensemble des matrices de $\mathfrak{U}_n$ ayant un 1 dans la position (i, j) est en bijection avec $\mathcal{H}_n$ par l'application qui à chaque matrice fait associer la matrice obtenue de celle-ci en échangeant les lignes 1 et i et les colonnes 1 et j. Donc les matrices de $\mathfrak{U}_n$ ayant un 1 dans la position (i, j) sont en nombre de h_n. Par suite,

$$\sum_{A \in \mathfrak{U}_n} A = h_n J$$

B. Étude du cardina de $\mathfrak{U}_n$

4) Par la question **2)**, X_0 est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 2, pour chaque $A \in \mathfrak{U}_n$. Donc

$$\begin{aligned} h_n J X_0 &= \sum_{A \in \mathfrak{U}_n} AX_0 \quad (\text{par } \mathbf{3})) \\ &= 2 \sum_{A \in \mathfrak{U}_n} X_0 \quad (\text{par } \mathbf{2})) \\ &= 2u_n X_0 \end{aligned}$$

D'un autre coté, X_0 est un vecteur propre de J associé à la valeur propre n. Alors, $nh_n = 2u_n$ ou encore $u_n = \frac{n}{2} h_n$.

On note $\mathcal{K}_n$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{H}_n$ comportant un 1 dans la position $(1,2)$ et un 1 dans la position $(2,1)$ et k_n son cardinal.

5) On note, pour $(i,j) \in [\![2,n]\!]^2$, $\mathcal{H}_{n,i,j}$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{H}_n$ ayant un 1 dans la position $(1,j)$ et un 1 dans la position $(i,1)$. Remarquons que $\mathcal{H}_{n,2,2} = \mathcal{K}_n$. Considérons, pour $(i,j) \in [\![2,n]\!]^2$, l'application

$$\begin{array}{rccc} \phi_{i,j} : & \mathcal{H}_{n,i,j} & \longrightarrow & \mathcal{K}_n \\ & A & \longmapsto & A_{i,j} \end{array}$$

où $A_{i,j}$ est obtenue de A par échange des lignes 2 et i et des colonnes 2 et j (lorsque $i=2$ ou $j=2$, on ne fait pas d'échange). Il n'est pas difficile de voir que $\phi_{i,j}$ est bijective et que

$$\mathcal{H}_n = \bigcup_{(i,j)\in[\![2,n]\!]^2} \mathcal{H}_{n,i,j}$$

qui est une réunion disjointe de parties ayant même cardinal que celui de $\mathcal{K}_n$. Donc

$$h_n = \mathrm{card}(\mathcal{H}_n) = \mathrm{card}([\![2,n]\!]^2) \times \mathrm{card}(\mathcal{K}_n) = (n-1)^2 k_n$$

6) On écrit $\mathcal{K}_n$ comme réunion disjointe des deux parties suivantes :

* $\mathcal{K}_{n,1}$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{K}_n$ ayant un 1 dans la position $(2,2)$. Il est clair que l'application de $\mathcal{K}_{n,1}$ dans $\mathfrak{U}_{n-2}$ qui, à chaque matrice A, on fait associer la matrice obtenue de celle-ci en supprimant les deux premières lignes et les deux premières colonnes est bijective. Donc $\mathrm{card}(\mathcal{K}_{n,1}) = \mathrm{card}(\mathfrak{U}_{n-2}) = u_{n-2}$.
* $\mathcal{K}_{n,2}$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{K}_n$ ayant un 0 dans la position $(2,2)$. Dans ce cas, on considère l'application de $\mathcal{K}_{n,2}$ dans $\mathcal{H}_{n-1}$ qui, à chaque matrice A, on fait associer la matrice obtenue de celle-ci en remplaçant le 0 de la position $(2,2)$ par 1 puis en supprimant la première ligne et la première colonne. Il s'agit bien d'une application et que celle-ci est bijective. Alors, $\mathrm{card}(\mathcal{K}_{n,2}) = \mathrm{card}(\mathcal{H}_{n-1}) = h_{n-1}$.

Par suite, $k_n = \mathrm{card}(\mathcal{K}_n) = \mathrm{card}(\mathfrak{U}_{n-2}) + \mathrm{card}(\mathcal{H}_{n-1}) = u_{n-2} + h_{n-1}$.

On pose $w_n = \dfrac{u_n}{(n!)^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

7) Soit $n \in \mathbb{N}$. Lorsque $n \geqslant 4$, on a :

$$\begin{array}{rcl} u_n & = & \frac{n}{2} h_n \quad \text{(par 4))} \\ & = & \frac{n}{2}(n-1)^2 k_n \quad \text{(par 5))} \\ & = & \frac{n(n-1)^2}{2} u_{n-2} + n(n-1)\frac{n-1}{2} h_{n-1} \quad \text{(par 6))} \\ & = & \frac{n(n-1)^2}{2} u_{n-2} + n(n-1) u_{n-1} \quad \text{(par 4))} \end{array}$$

et, à l'aide des conventions $u_0 = 1$ et $u_1 = 0$, cette relation est encore vraie pour $n = 2$ ou $n = 3$. Maintenant, pour $n \geqslant 2$, on a :

$$\begin{array}{rcl} w_n & = & \frac{u_n}{(n!)^2} \\ & = & \frac{n(n-1)^2}{2}\frac{((n-2)!)^2}{(n!)^2}\frac{1}{((n-2)!)^2} u_{n-2} + n(n-1)\frac{((n-1)!)^2}{(n!)^2}\frac{1}{((n-1)!)^2} u_{n-1} \\ & = & \frac{1}{2n} w_{n-2} + \frac{n-1}{n} w_{n-1} \end{array}$$

8) Il est clair que u_0 et u_1 sont des éléments de $[0,1]$. À l'aide d'une récurrence sur n et en utilisant la relation $w_n = \frac{1}{2n} w_{n-2} + \frac{n-1}{n} w_{n-1}$, il est facile de d'établir que $w_n \in [0,1]$. Toujours par la relation $w_n = \frac{1}{2n} w_{n-2} + \frac{n-1}{n} w_{n-1}$ et le fait que w_n positif pour tout n, on voit que, pour $n \geqslant 2$,

$$w_n = \frac{1}{2n} w_{n-2} + \frac{n-1}{n} w_{n-1} \geqslant \frac{n-1}{n} w_{n-1} \geqslant \cdots \geqslant \frac{2}{n} w_2 = \frac{1}{2n}$$

ceci montre que la série $\sum w_n$ diverge. Maintenant, pour $x \in [0,1[$, on a $0 \leqslant w_n x^n \leqslant x^n$. Comme la série $\sum x^n$ est convergente, il en est de même pour la série $\sum w_n x^n$. Notons R le rayon de convergence de la série entière $\sum w_n x^n$. La série $\sum w_n x^n$ est convergente pour tout $x \in [0,1[$, donc $R \geqslant 1$. La série $\sum w_n$ est divergente, donc $R \leqslant 1$. Enfin, $R = 1$.

On pose $W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n x^n$ pour tout $x \in]-1,1[$.

9) La fonction W est de classe $\mathcal{C}^\infty$sur $]-1,1[$ et on a pour tout $x \in]-1,1[$:

$$\begin{aligned}
W'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n w_n x^{n-1} \\
&= w_1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{2} w_{n-2} x^{n-1} + (n-1) w_{n-1} x^{n-1} \right) \\
&= w_1 + \frac{x}{2} \sum_{n=2}^{\infty} w_{n-2} x^{n-2} + x \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) w_{n-1} x^{n-2} \quad \text{(les deux séries convergent)} \\
&= \frac{x}{2} W(x) + x W'(x) \quad (w_1 = 0)
\end{aligned}$$

Donc W est solution sur $]-1,1[$ de l'équation différentielle $y'(x) = \frac{x}{2(1-x)} y(x)$ en plus de la condition initiale $y(0) = w_0 = 1$. Une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{x}{2(1-x)}$ sur $]-1,1[$ est $x \mapsto -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\ln(1-x)$. Les solutions de l'équation différentielle $y'(x) = \frac{x}{2(1-x)} y(x)$ sont donc de la forme : $x \mapsto k \dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}}{\sqrt{1-x}}$ avec $k \in \mathbb{R}$. L'unique solution de cette équation différentielle avec la condition initiale $y(0) = 1$ est la fonction $W : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}}{\sqrt{1-x}}$

C. Équivalent d'une suite de coefficients d'un développement en série entière

Cette partie permet d'obtenir un équivalent de u_n pour $n \to +\infty$. Soit α un réel et β un réel strictement positif. On considère la fonction ϕ définie pour $x \in]-1,1[$ par la formule :

$$\phi(x) = \frac{\mathrm{e}^{\alpha x}}{(1-x)^\beta}.$$

On note $\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x$ la fonction Γ définie pour tout réel $t > 0$: On rappelle que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ et que $\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$ pour tout $t > 0$.

10) On rappelle que la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{\alpha x}$ est développable en série entière avec un rayon de convergence $R_1 = +\infty$ et de même pour la fonction $x \mapsto \frac{1}{(1-x)^\beta} = (1-x)^{-\beta}$ avec un rayon de convergence $R_2 = 1$ (puisque $-\beta \notin \mathbb{N}$). Ceci montre que la fonction ϕ produit de ces deux fonctions est développable en série entière (produit de Cauchy des deux séries précédentes) avec un rayon de convergence $R_3 \geqslant 1$. La fonction ϕ est donc la somme d'une série entière $\sum \phi_n x^n$ pour tout $x \in]-1,1[$.

11) Posons $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^\beta} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour tout $x \in]-1,1[$. On sait que

$$a_0 = 1 \text{ et } \forall\, n \in \mathbb{N}^*, a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = (-1)^n \frac{(-\beta)(-\beta-1)\cdots(-\beta-n+1)}{n!} = \frac{\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{n!}$$

D'un autre coté, pour $n \geqslant 1$, on a :

$$\Gamma(\beta+n) = (\beta+n-1)\Gamma(\beta+n-1) = (\beta+n-1)\cdots(\beta+1)\beta\Gamma(\beta)$$

Comme $\Gamma(\beta) > 0$, on trouve

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\beta) \times n!}$$

12) Pour tout $x \in]-1,1[$, on a $\mathrm{e}^{\alpha x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{\alpha^n}{n!} x^n$, $\dfrac{1}{(1-x)^\beta} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $\phi(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{\alpha x}}{(1-x)^\beta} = \sum_{n=0}^{+\infty} \phi_n x^n$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\phi_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{\alpha^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\Gamma(\beta+k)}{\Gamma(\beta) \times k!} \frac{\alpha^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{\Gamma(\beta) \times n!} \psi_n$$

avec

$$
\begin{aligned}
\psi_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!\alpha^{n-k}}{k!(n-k)!}\Gamma(\beta+k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \alpha^{n-k} \int_0^{\infty} u^{\beta+k-1}e^{-u}\mathrm{d}u \\
&= \int_0^{\infty} \sum_{k=0}^{n} C_n^k \alpha^{n-k} u^k u^{\beta-1} e^{-u}\mathrm{d}u \quad \text{(somme finie)} \\
&= \int_0^{\infty} (\alpha+u)^n u^{\beta-1}e^{-u}\mathrm{d}u
\end{aligned}
$$

13) On fixe $a \in \mathbb{R}$ tel que $a > |\alpha|$. Étudions les variations de la fonction $g_{\alpha,n} : \begin{array}{ccc} [-\alpha, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longmapsto & (\alpha+u)^n e^{-u} \end{array}$

La fonction g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et pour tout $u \in [-\alpha, +\infty[$,

$$g'_{\alpha,n}(u) = (\alpha+u)^{n-1}e^{-u}(n-\alpha-u)$$

Le signe de $g'_{\alpha,n}(u)$ montre que la fonction $g_{\alpha,n}$ est croissante sur $[-\alpha, -\alpha+n]$ et décroissante sur $[-\alpha+n, +\infty[$. Pour tout $n \geqslant a+|\alpha|$ de sorte que $g_{|\alpha|,n}$ soit croissante sur $[0,a]$, on a :

$$
\begin{aligned}
\left|\int_0^a u^{\beta-1}e^{-u}(\alpha+u)^n\mathrm{d}u\right| &\leqslant \int_0^a u^{\beta-1}e^{-u}(|\alpha|+u)^n\mathrm{d}u \\
&\leqslant \int_0^a u^{\beta-1} g_{|\alpha|,n}(u)\mathrm{d}u \\
&\leqslant g_{|\alpha|,n}(a)\int_0^a u^{\beta-1}\mathrm{d}u = (|\alpha|+a)^n \frac{a^\beta}{\beta}
\end{aligned}
$$

D'une autre part, si en plus $n \geqslant \alpha+1$,

$$
\begin{aligned}
\int_a^{\infty} u^{\beta-1}e^{-u}(\alpha+u)^n\mathrm{d}u &\geqslant \int_{n-\alpha}^{\infty} e^{-u}(\alpha+u)^n\mathrm{d}u \quad (u^{\beta-1} \geqslant 1) \\
&\geqslant \int_{n-\alpha}^{\infty} e^{-u}n^n\mathrm{d}u \\
&\geqslant e^{\alpha}e^{-n}n^n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}}e^{\alpha} \quad \text{(formule de Stirling)}
\end{aligned}
$$

mais $(|\alpha|+a)^n \frac{a^\beta}{\beta}$ est négligeable devant $\dfrac{n!}{\sqrt{2\pi n}}e^{\alpha}$ quand n tend vers $+\infty$, d'où le résultat.

14) Pour tout $a > |\alpha|$, on a

$$
\begin{aligned}
\left|\underbrace{\int_a^{\infty} e^{-u}(\alpha+u)^{n+\beta-1}\mathrm{d}u}_{z_n} - \underbrace{\int_a^{\infty} u^{\beta-1}e^{-u}(\alpha+u)^n\mathrm{d}u}_{w_n}\right| &\leqslant \int_a^{\infty} e^{-u}(\alpha+u)^{n+\beta-1}\left|1-\left(\frac{u}{\alpha+u}\right)^{\beta-1}\right|\mathrm{d}u \\
&\leqslant \int_a^{\infty} e^{-u}(\alpha+u)^{n+\beta-1}\left|1-\left(1-\frac{\alpha}{\alpha+u}\right)^{\beta-1}\right|\mathrm{d}u
\end{aligned}
$$

Soit h la fonction $x \mapsto (1-x)^{\beta-1}$ définie sur $I=[c,d] \subset]-1,1[$, où $c = \frac{-|\alpha|}{-|\alpha|+a}$ et $d = \frac{|\alpha|}{|\alpha|+a}$ de sorte que :

$$\left|\int_a^{\infty} e^{-u}(\alpha+u)^{n+\beta-1}\mathrm{d}u - \int_a^{\infty} u^{\beta-1}e^{-u}(\alpha+u)^n\mathrm{d}u\right| \leqslant \int_a^{\infty} e^{-u}(\alpha+u)^{n+\beta-1}\left|h(0)-h\left(\frac{\alpha}{\alpha+u}\right)\right|\mathrm{d}u$$

Pour tout $x \in I$, on a $|h(0)-h(x)| \leqslant M|x|$ où $M = \sup\limits_{t\in I}|h'(t)|$. Donc

$$\left|\int_a^{\infty} e^{-u}(\alpha+u)^{n+\beta-1}\mathrm{d}u - \int_a^{\infty} u^{\beta-1}e^{-u}(\alpha+u)^n\mathrm{d}u\right| \leqslant M|\alpha| \int_a^{\infty} e^{-u}(\alpha+u)^{n+\beta-2}\mathrm{d}u$$

c'est-à-dire que :

$$|z_n - w_n| \leqslant M\,|\alpha|\,z_{n-1} \qquad (**)$$

A l'aide d'une intégration par parties, on trouve :

$$(n+\beta-1)z_{n-1} = z_n - e^{-a}(\alpha+a)^{n+\beta-1} \leqslant z_n$$

Puisque $z_k > 0$ pour tout k, alors z_{n-1} est négligeable devant z_n quand n tend vers ∞. Ce qui donne, d'après $(**)$, l'équivalence de z_n et w_n quand n tend vers ∞. D'une autre part,

$$\begin{aligned}
\psi_n &= \int_0^a (\alpha+u)^n u^{\beta-1}e^{-u}\mathrm{d}u + \int_a^\infty (\alpha+u)^n u^{\beta-1}e^{-u}\mathrm{d}u \\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} \int_a^\infty (\alpha+u)^n u^{\beta-1}e^{-u}\mathrm{d}u \quad (\text{par } \mathbf{13)} \text{ puisque } a > |\alpha|) \\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} \int_a^\infty (\alpha+u)^{n+\beta-1}e^{-u}\mathrm{d}u
\end{aligned}$$

15) On a :

$$\underbrace{\int_a^\infty e^{-u}(\alpha+u)^{n+\beta-1}\mathrm{d}u}_{z_n} = \underbrace{-\int_{-\alpha}^a e^{-u}(\alpha+u)^{n+\beta-1}\mathrm{d}u}_{x_n} + \underbrace{\int_{-\alpha}^\infty e^{-u}(\alpha+u)^{n+\beta-1}\mathrm{d}u}_{y_n}$$

Par le changement de variables $t = \alpha + u$, on aura :

$$|x_n| = \int_{-\alpha}^a e^{-u}(\alpha+u)^{n+\beta-1}\mathrm{d}u = e^\alpha \int_0^{a+\alpha} e^{-t}t^{n+\beta-1}\mathrm{d}t \leqslant \frac{e^\alpha(a+\alpha)^{n+\beta}}{n+\beta}$$

et

$$y_n = \int_{-\alpha}^\infty e^{-u}(\alpha+u)^{n+\beta-1}\mathrm{d}u = e^\alpha \int_0^\infty e^{-t}t^{n+\beta-1}\mathrm{d}t = e^\alpha\Gamma(n+\beta)$$

Notons k la partie entière de β, alors

$$\begin{aligned}
\Gamma(n+\beta) = (n+\beta-1)\cdots(\beta+1)\Gamma(\beta+1) &\geqslant (n+k-1)\cdots(k+1)\Gamma(\beta+1) \\
&\geqslant \frac{\Gamma(\beta+1)}{k!}(n+k-1)!
\end{aligned}$$

Ceci montre que x_n est négligeable devant y_n ou enocre z_n est équivalent à $y_n = e^\alpha\Gamma(n+\beta)$ quand n tend vers $+\infty$. Par suite z_n est équivalent $e^\alpha\Gamma(n+\beta)$. Par la question précédente, on a $\psi_n \underset{n\to+\infty}{\sim} z_n$, donc

$$\psi_n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^\alpha \int_0^\infty e^{-t}t^{n+\beta-1}\mathrm{d}t = e^\alpha\Gamma(n+\beta)$$

On revient sur la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie au début du problème.

16) On rappelle que $\phi_n = \dfrac{\psi_n}{\Gamma(\beta)n!}$ et que $\psi_n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^\alpha\Gamma(n+\beta)$. Alors,

$$\phi_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e^\alpha\Gamma(n+\beta)}{\Gamma(\beta)n!}$$

Rappelons aussi que $W(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}}{\sqrt{1-x}}$ pour tout $x \in]-1,1[$, c'est le cas de $\alpha = -\frac{1}{2}$ et $\beta = \frac{1}{2}$. Ceci donne :

$$\frac{u_n}{(n!)^2} = w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e^{-\frac{1}{2}}\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})n!}$$

Donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n!\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\sqrt{e\pi}}$. D'un autre coté,

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) &= \left(n-\frac{1}{2}\right)\cdots\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{2n-1}{2}\frac{2n-3}{2}\cdots\frac{1}{2}\sqrt{\pi} \\
&= \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)}\sqrt{\pi}
\end{aligned}$$

Par suite, $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{(2n)!}{2^{2n}\sqrt{e}}$. Par la formule de Stirling : $(2n)! \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(2n)^{2n}}{e^{2n}}\sqrt{4\pi n}$, nous aurons :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\left(\frac{n}{e}\right)^{2n+\frac{1}{2}}\sqrt{\pi}$$

D. Étude de rang

Dans cette partie, on cherche à déterminer le rang r_n du système constitué des u_n matrices de $\mathfrak{U}_n$, considérées comme éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On rappelle que X_0 est le vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont tous les coefficients sont égaux à 1 et J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

17) Pour $n=2$, on sait que $\mathfrak{U}_2$ contient une seule matrice non nulle, donc $r_2 = 1$. Pour $n=3$, $\mathfrak{U}_3$ contient 6 matrices $A_1,\ldots,A_6$ (par la question **1)**). Notons F le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par ces 6 matrices. Par la question **3)**, J est un élément de F, donc F est aussi engendré par $J-A_1,\ldots,J-A_6$ qui sont dans l'ordre :

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\ \text{et}\ \begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$$

Soient $\alpha_1,\ldots,\alpha_6$ des réels donnés. Alors

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{6}\alpha_i(J-A_i) = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} &\iff \begin{pmatrix}\alpha_1+\alpha_2 & \alpha_3+\alpha_4 & \alpha_5+\alpha_6\\ \alpha_4+\alpha_6 & \alpha_2+\alpha_5 & \alpha_1+\alpha_3\\ \alpha_3+\alpha_5 & \alpha_1+\alpha_6 & \alpha_2+\alpha_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\\ &\iff \alpha_1 = -\alpha_2 = -\alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = -\alpha_6\end{aligned}$$

Ceci montre que $r_3 = 5$.

On considère l'espace vectoriel $\mathcal{V}_n$ l'ensemble des matrices $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que X_0 soit à la fois un vecteur propre pour A et pour sa transposée ${}^tA$.

18) Si A est une matrice de $\mathfrak{U}_n$, alors sa transposée ${}^tA$ est aussi dans $\mathfrak{U}_n$. Comme X_0 est un vecteur propre de toute matrice de $\mathfrak{U}_n$, on aura $\mathfrak{U}_n \subset \mathcal{V}_n$. Soit $A=(a_{i,j})$ une matrice $\mathcal{V}_n$ et notons λ la valeur propre de A associé à X_0 et μ celle de ${}^tA$ associé à X_0. Donc pour tout $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$,

$$\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} = \lambda \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n} a_{k,j} = \mu$$

Par suite,

$$n\lambda = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\right) = n\mu$$

Ce qui montre que $\lambda = \mu$.

19) Soit $\mathcal{B} = (V_1,\ldots,V_n)$ une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ euclidien usuel avec $V_1 = \frac{1}{\sqrt{n}}X_0$. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Cette matrice A appartient à $\mathcal{V}_n$ si, et seulement si, AV_1 et ${}^tAV_1$ sont colinéaires à V_1. En d'autres termes, la matrice A appartient à $\mathcal{V}_n$ si, et seulement si, pour tout $i\in[\![2,n]\!]$, ${}^tV_iAV_1 = 0$ et ${}^tV_i{}^tAV_1 = 0$. Notons, pour $i\in[\![2,n]\!]$, φ_i et ψ_i les formes linéaires définies sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par les formules :

$$\varphi_i(A) = {}^tV_iAV_1 \quad \text{et} \quad \psi_i(A) = {}^tV_i{}^tAV_1$$

de sorte que $\mathcal{V}_n = \left(\bigcap_{i=2}^{n}\ker(\varphi_i)\right)\bigcap\left(\bigcap_{i=2}^{n}\ker(\psi_i)\right)$. Soient $\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ et $\beta_2,\ldots,\beta_n$ des réels tels que :

$$\sum_{i=2}^{n}\alpha_i\varphi_i + \sum_{i=2}^{n}\beta_i\psi_i = 0 \qquad (*)$$

Notons $V = \sum_{i=2}^{n}\alpha_iV_i$ et $W = \sum_{i=2}^{n}\beta_iV_i$ de sorte que la relation $(*)$ devienne :

$$\forall\ A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ {}^tVAV_1 + {}^tW{}^tAV_1 = 0$$

Si on choisit A la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf celui dans la position (i,i) qui vaut $\sqrt{n}$, alors $AV_1 = {}^tAV_1 = E_i$ le i-ième vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et le vecteur $V+W$ est orthogonal aux éléments de cette base canonique, il est donc nul. Par suite,

$$\forall\ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ {}^tV(A - {}^tA)V_1 = 0$$

Maintenant, si on écrit $V = (v_1, \ldots, v_n)$ (dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$) et on choisit A la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf celui dans la position (i,j) avec $i \neq j$ qui vaut $\sqrt{n}$, on aura :

$$0 = {}^tV(A - {}^tA)V_1 = {}^tV(E_i - E_j) = v_i - v_j$$

Le vecteur V est donc colinéaire à V_1 et il est orthogonal à ce dernier, donc nul. Par suite, $\alpha_2 = \cdots = \alpha_n = \beta_2 = \cdots = \beta_n = 0$. En dautres termes les $2n-2$ formes linéaires, φ_i et ψ_i pour $i \in [\![2,n]\!]$, sont indépendantes et en conséquence $\dim(\mathcal{V}_n) = n^2 - (2n-2) = (n-1)^2 + 1$. Cette dimension constitut donc une majorartion de r_n puisque $\mathfrak{U}_n \subset \mathcal{V}_n$.

Pour $n \geqslant 3$, soit A une matrice de $\mathfrak{U}_n$ comportant des 1 en positions $(1,1)$ et $(2,2)$ et des 0 en positions $(1,2)$ et $(2,1)$.

20) Notons $A = (a_{i,j})$ et soit $B = (b_{i,j})$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$b_{i,j} = \begin{cases} a_{i,j} & \text{si } i > 2 \text{ ou } j > 2 \\ 1 - a_{i,j} & \text{si } i \leqslant 2 \text{ et } j \leqslant 2 \end{cases}$$

La matrice B est binaire, en plus, les matrices A et B ont les mêmes lignes et les mêmes colonnes à partir de la troisième ligne ou colonne. Les deux premières lignes de B ainsi que ses deux premières colonnes comportent exactement deux 1. C'est bien une matrice de $\mathfrak{U}_n$. Maintenant pour tout (i,j),

$$\begin{aligned} a_{i,j} - b_{i,j} &= \begin{cases} 0 & \text{si } i > 2 \text{ ou } j > 2 \\ 2a_{i,j} - 1 & \text{si } i \leqslant 2 \text{ et } j \leqslant 2 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } i > 2 \text{ ou } j > 2 \\ 1 & \text{si } i = j,\ i \leqslant 2 \text{ et } j \leqslant 2 \\ -1 & \text{si } i \neq j,\ i \leqslant 2 \text{ et } j \leqslant 2 \end{cases} \end{aligned}$$

La matrice $A - B$ ne comporte donc que des éléments nuls, sauf en positions (i,j) avec $i \leqslant 2$ et $j \leqslant 2$.
Notons r'_n le rang du système constitué de toutes les matrices $U - V$ où $U, V \in \mathfrak{U}_n$. Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, notons $A_{i,j}$ la matrice obtenue de A par les deux opérations suivantes : $L_i \longleftrightarrow L_2$ et $C_i \longleftrightarrow C_2$ qui consistent à échanger les deux lignes i et 2 et les deux colonnes j et 2 de la matrice A. De la même façon, on note $B_{i,j}$ la matrice obtenue de B par les mêmes opérations et rappelons que $A_{i,j}$ et $B_{i,j}$ sont des matrices de $\mathfrak{U}_n$. En plus, $A_{i,j} - B_{i,j}$ est une matrice à coefficients nuls sauf en positions $(1,1)$, (i,i), $(1,j)$ et $(i,1)$ et que 1 est en position (i,i). On remarque que par suppression de la première ligne et de la première colonne de $A_{i,j} - B_{i,j}$, on obtient la matrice $E_{i-1,j-1}$ de la base canonique des matrices élémentaires de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$. La famille $(A_{i,j} - B_{i,j})_{(i,j)\in[\![2,n]\!]^2}$ est donc libre et $r'_n \geqslant (n-1)^2$.

21) D'après les deux question précédentes, on a : $(n-1)^2 \leqslant r'_n \leqslant r_n \leqslant (n-1)^2 + 1$. D'un autre coté, pour tout $U \in \mathfrak{U}_n$, $UX_0 = 2X_0$, donc pour tous U et V de $\mathfrak{U}_n$, $(U - V)X_0 = 0$. On sait que $JX_0 = nX_0$, donc J ne peut être combinaison linéaire des éléments $U - V$, avec $U, V \in \mathfrak{U}_n$, mais elle est combinaison linéaire des éléments de $\mathfrak{U}_n$. En conclusion, $r_n > r'_n$ et, par suite, $r_n = (n-1)^2 + 1$.