Corrigé de la première épreuve de mathématiques

Mines-Ponts 2010 - filière MP

A. Prolongement harmonique

1) Les suites $(c_n)_{n\geq 1}$ et $(c_{-n})_{n\geq 1}$ sont bornées (par exemple par $||f||_\infty||$) : les séries entières $\sum_{n\geq 1} c_n z^n$ et $\sum_{n\geq 1} c_{-n} z^n$ sont donc de rayons de convergence au moins égaux à 1 : on en déduit que $\sum_{n\geq 1} c_n z^n$ et $\sum_{n\geq 1} c_{-n} \overline{z}^n$ convergent pour tout $z \in D$.

2) Soit $y \in]-1,1[$ et $I =]-\sqrt{1-y^2}, \sqrt{1-y^2}[$. Nous avons :

- $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n :\ x \longmapsto a_n(x+iy)^n$ est de classe C^1 sur I ;
- $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge simplement sur I ;
- $\sum_{n\geq 0} u_n'$ converge normalement (donc uniformément) sur tout segment contenu dans I (car la série dérivée $S'(z)$ est de même rayon ≥ 1 que la série $S(z)$).

Le théorème de dérivation terme à terme permet donc de conclure que $\widetilde{S}$ est dérivable partiellement par rapport à x sur $\widetilde{D}$, avec :

$$\forall\,(x,y) \in \widetilde{D},\ \frac{\partial \widetilde{S}}{\partial x}(x,y) = S'(x+iy).$$

Comme la série dérivée est de rayon ≥ 1, cette dérivée partielle est continue sur le dique ouvert $\widetilde{D}$.

3) Une preuve identique prouve que $\widetilde{S}$ est dérivable partiellement par rapport à y sur $\widetilde{D}$, avec :

$$\forall\,(x,y) \in \widetilde{D},\ \frac{\partial \widetilde{S}}{\partial y}(x,y) = i\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}(x+iy)^n = i\,\frac{\partial \widetilde{S}}{\partial x}(x,y)$$

$\widetilde{S}$ est donc de classe C^1 sur $\widetilde{D}$; le même résultat s'applique aux dérivées partielles de $\widetilde{S}$, qui est donc de classe C^2 (et même C^∞ par récurrence immédiate), avec :

$$\forall\,(x,y) \in \widetilde{D},\ \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \widetilde{S}}{\partial x^2}(x,y) = S''(x+iy) \\ \dfrac{\partial^2 \widetilde{S}}{\partial y^2}(x,y) = i^2 S''(x+iy) = -\dfrac{\partial^2 \widetilde{S}}{\partial x^2}(x,y) \end{cases}$$

ce qui donne $\Delta S(z) = 0$ pour tout $z \in D$.

4) D'après la question précédente, les applications $\varphi_1 :\ z \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ et $\varphi_2 :\ z \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n} z^n$ sont de classe C^2 et de laplaciens nuls sur D. Par composition, $g_f :\ z \longmapsto \varphi_1(z) + \varphi_2(\overline{z})$ est de classe C^2 sur D et :

$$\forall\, z \in D,\ \Delta(g_f)(z) = \Delta(\varphi_1)(z) + \frac{\partial^2 \widetilde{\varphi_2}}{\partial x^2}(\overline{z}) + (-1)^2\frac{\partial^2 \widetilde{\varphi_2}}{\partial y^2}(\overline{z}) = \Delta(\varphi_1)(z) + \Delta(\varphi_2)(\overline{z}) = 0$$

5) Nous avons $g_f(z) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})\,\mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})\left(e^{-int}z^n + e^{int}\overline{z}^n\right)\,\mathrm{d}t.$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $u_n :\ t \longmapsto f(e^{it})\left(e^{-int}z^n + e^{int}\overline{z}^n\right)$ est continue sur $[-\pi,\pi]$ et la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge normalement sur $[-\pi,\pi]$:

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, t \in [-\pi,\pi],\ \left|f(e^{it})\left(e^{-int}z^n + e^{int}\overline{z}^n\right)\right| \leq 2\,||f||_\infty |z|^n = \alpha_n$$

où α_n ne dépend pas de t et est un terme général de série convergente ($|z| < 1$). On en conclut que $t \longmapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t)$ est continue sur $[-\pi,\pi]$ et que l'on peut échanger les signes $\sum$ et $\int$:

$$\begin{aligned}
g_f(z) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})\left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-int}z^n + e^{int}\overline{z}^n\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})\,\mathrm{Re}\left(1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty}\left(z\,e^{-it}\right)^n\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})\,\mathrm{Re}\left(1 + 2\,\frac{z\,e^{-it}}{1 - z\,e^{-it}}\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})\,\mathrm{Re}\left(\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\right)\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

6) Quand $f = p_n$, $c_p = \delta_{p,n}$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$ et $g_{p_n}(z) = z^n$ pour tout $z \in D$.
Quand $f = q_n$, $c_p = \delta_{p,-n}$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$ et $g_{q_n}(z) = \overline{z}^n$ pour tout tout $z \in D$.

Avec $f = p_0$, la relation obtenue à la question 5 donne :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_z(t)\,\mathrm{d}t = g_{p_0}(z) = 1$$

Enfin, pour $t \in [-\pi,\pi]$, $P_z(t) = \mathrm{Re}\left(\dfrac{(e^{it}+z)(e^{-it}-\overline{z})}{|e^{it}-z|^2}\right) = \dfrac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2} > 0.$

7) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons en utilisant la positivité de P_z :

- $\forall\, z \in D,\ |G_{f_n}(z) - G_f(z)| \leq \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |f_n(e^{it}) - f(e^{it})| P_z(t)\,\mathrm{d}t \leq ||f_n - f||_\infty \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_z(t)\,\mathrm{d}t = ||f_n - f||_\infty$
- $\forall\, z \in T,\ |G_{f_n}(z) - G_f(z)| = |f_n(z) - f(z)| \leq ||f_n - f||_\infty$

donc $\sup\limits_{z\in\overline{D}} |G_{f_n}(z) - G_f(z)| \leq ||f_n - f||_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$: G_{f_n} converge uniformément vers G_f sur $\overline{D}$ dès que f_n converge uniformément vers f sur T.

8) Soit $f \in \mathcal{C}(T)$. Le (second) théorème d'approximation de Weïerstrass permet d'affirmer qu'il existe une suite de polynômes trigonométriques $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers $\widetilde{f}$ ($\widetilde{f} :\ \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est continue et 2π-périodique). Il existe ensuite une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{P}(T)$ telle que $P_n = \widetilde{f_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$: nous avons alors

$$||f_n - f||_\infty = \sup_{t\in\mathbb{R}} |\widetilde{f_n}(t) - \widetilde{f}(t)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

et la suite (f_n) converge uniformément vers f.

On en déduit que G_{f_n} converge uniformément vers G_f sur $\overline{D}$. Comme les f_n sont éléments de $\mathcal{P}(T)$, nous avons $G_{f_n} = f_n$ (avec l'abus d'écriture déjà utilisé à la question 6) : les G_{f_n} sont donc continues sur $\overline{D}$, ainsi que leur limite uniforme G_f.

9) Pour tout z, $u(z) = G(z) + \varepsilon(x^2 + y^2)$, donc u est de classe C^2 sur D et $\Delta u(z) = \Delta G(z) + 4\varepsilon = 4\varepsilon > 0$ pour tout $z \in D$.

$\overline{D}$ est compact et u est continue sur $\overline{D}$ et à valeur réelle : u est majorée sur $\overline{D}$ et atteint sa borne supérieure en un point $z_0 \in \overline{D}$. Supposons que $z_0 = x_0 + iy_0 \in D$. La fonction $x \longmapsto u(x+iy_0)$ est de classe C^2 et atteint son maximum en x_0 intérieur à son intervalle de définition : sa dérivée seconde en x_0 est donc négative, soit $\dfrac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial x^2}(x_0, y_0) \leq 0$. De même, $\dfrac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial y^2}(x_0, y_0) \leq 0$, ce qui contredit $\Delta u(z_0) > 0$.

On en déduit que $z_0 \in T$, d'où $u(z) \leq G(z_0) + \varepsilon|z_0| = f(z_0) + \varepsilon = \varepsilon$ pour tout $z \in \overline{D}$.

10) Supposons que $f = 0$ mais que G soit à valeurs complexes et notons G_r et G_i ses parties réelle et imaginaire. Les fonctions G_r, G_i,$-G_r$ et $-G_i$ vérifient alors les conditions (a1),(a2) et (a3) : la question 9) prouve que $-\varepsilon \leq G_r(z)) \leq \varepsilon$ et $-\varepsilon \leq G_i(z) \leq \varepsilon$ pour tous $z \in \overline{D}$ et $\varepsilon > 0$: les fonctions G_r et G_i sont donc nulles sur $\overline{D}$ et $G = 0 = G_f$.

Si $f \in \mathcal{C}(T)$ et si G vérifie (a1),(a2) et (a3), la fonction $G - G_f$ vérifie (a2) et (a3) et sa restruction à T est nulle : $G = G_f$ d'après l'étude du cas particulier.

B. Deux applications

11) G est clairement continue sur $\overline{D}$, de classe C^2 sur D et

$$\forall z = x + iy \in D,\ \Delta G(z) = e^x \cos y - e^x \cos y = 0$$

donc G vérifie (a2) et (a3). En notant f_0 la restriction de G à T, la partie A prouve que $G = G_{f_0}$. L'intégrale dont on demande le calcul est égale à c_n ($\widetilde{f_0}$ est paire) et $c_n = c_{-n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Nous avons donc :

$$\forall\, z = x + iy \in D,\ c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n\,(z^n + \overline{z}^n) = e^x\,\frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} = \frac{e^z + e^{\overline{z}}}{2} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n + \overline{z}^n}{2\,n!}$$

En particulier :

$$\forall\, \rho \in]-1, 1[,\ c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} 2\,c_n\,\rho^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\rho^n}{n!}$$

Par unicité du développement en séries entières, nous obtenons $c_0 = 1$ et $c_n = \dfrac{1}{2\,n!}$ pour tout $n \geq 1$, soit :

$$\forall\, n \in \mathbb{Z},\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{\cos t}\cos(\sin t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 1 & \text{si n=0} \\ \dfrac{1}{2\,|n|!} & \text{sinon} \end{cases}$$

12) Supposons que u est de classe C^2 et de laplacien nul sur U et fixons un disque fermé $\overline{D}(a, R) \subset U$. Soit $G : \begin{array}{ccc} \overline{D} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & u(a + Rz) \end{array}$ et soit f la restriction de G à T. On montre facilement que G vérifie (a1),(a2) et (a3) et la partie A donne

$$\forall\, z \in D(a, R),\ u(z) = G((z - a)/R) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(a + Re^{it})P_{(z-a)/R}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Réciproquement, supposons que pour tout disque fermé $\overline{D}(a,R)$ contenu dans U, on ait

$$\forall\, z \in D(a,R),\ u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(a+Re^{it})P_{(z-a)/R}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Un tel disque étant fixé, l'application $\begin{array}{cccc} f: & T & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & u(a+Rz) \end{array}$ est continue, donc la partie A donne :

$$\forall\, z \in D,\ g_f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})P_z(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(a+Re^{it})P_z(t)\,\mathrm{d}t = u(a+Rz)$$

Comme g_f est de classe C^2 sur D et de laplacien nul, nous en déduisons que u est de classe C^2 et de laplacien nul sur $D(a,R)$. Ceci étant vrai pour tout disque $\overline{D}(a,R)$ inclu dans U, u est de classe C^2 et de laplacien nul sur l'ouvert U.

13) Remarquons tout d'abord que u, comme limite uniforme de fonctions continues, est continue sur U. Soit ensuite un disque $\overline{D}(a,R)$ contenu dans U et soit $z \in D(a,R)$. Le sens direct de l'équivalence démontrée en 12) donne :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u_n(a+Re^{it})P_{(z-a)/R}(t)\,\mathrm{d}t$$

La fonction $P_{(z-a)/R}$ est continue et bornée par un réel M sur le compact $[-\pi,\pi]$, donc :

$$\forall\, t \in [-\pi,\pi],\ \left|u_n(a+Re^{it})P_{(z-a)/R}(t) - u(a+Re^{it})P_{(z-a)/R}(t)\right| \leq M \sup_{z\in U}|u_n(z)-u(z)|$$

ce qui prouve que $u_n(a+Re^{it})P_{(z-a)/R}(t)$ converge uniformément (par rapport à t) vers $u(a+Re^{it})P_{(z-a)/R}(t)$: le domaine d'intégration étant borné, la convergence uniforme permet d'échanger limite et intégrale, ce qui donne :

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(a+Re^{it})P_{(z-a)/R}(t)\,\mathrm{d}t$$

La réciproque démontrée en 12) permet donc d'affirmer que u est de classe C^2 et de laplacien nul sur U.

C. Propriétés duales

14) Soit $z \in D$. Les propriétés (c2) et (c3) ont été démontrées à la question 6. Nous avons :

$$\forall\, f \in \mathcal{C}(T),\ \varphi_z(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})P_z(t)\,\mathrm{d}t$$

donc φ_z est clairement linéaire (linéarité de l'intégrale, bilinéarité du produit). Enfin :

$$\forall\, f \in \mathcal{C}(T),\ |\varphi_z(f)| \leq N(f)\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_z(t)\,\mathrm{d}t = N(f)$$

donc φ_z est continue, ce qui achève de démontrer (c1) et (c4).

15) Supposons que φ vérifie (c1),(c2) et (c3). φ coïncide alors avec φ_z sur les familles (p_n) et (q_n), donc sur l'espace $\mathcal{P}(T)$ (φ et φ_z sont linéaires). Comme φ et φ_z sont continues, elles coïncident sur $\overline{\mathcal{P}(T)}$, c'est-à-dire, d'après le question 8, sur $\mathcal{C}(T)$: $\varphi = \varphi_z$.

16) $0 \leq f \leq N(f)$ donne $-N(f) \leq 2f - N(f) \leq N(f)$. Comme il existe $z_0 \in T$ tel que $2f(z_0) - N(f) = N(f)$, on en déduit :

$$N(h)^2 = \sup_{z\in T}\left((2f(z)-N(f))^2 + \lambda^2\right) = N(f)^2 + \lambda^2$$

17) Posons $\varphi(f) = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. Comme φ est $\mathbb{C}$-linéaire et $\varphi(p_0) = 1$, nous avons $\varphi(c) = c$ pour toute constante complexe c (la fonction constante égale à c est notée c). Ainsi :

$$|\varphi(h)|^2 = |2\varphi(f) - N(f) + i\lambda|^2 = (2a - N(f))^2 + (2b - \lambda)^2 = 4a^2 - 4aN(f) + N(f)^2 + 4b^2 - 4b\lambda + \lambda^2$$

et (c4) donne :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ 4a(a - N(f)) + 4b^2 - 4b\lambda \leq 0$$

ce qui impose $b = 0$ et $a(a - N(f)) \leq 0$. On en déduit que $\varphi(f)$ est réel. Enfin, $a - N(f) = \varphi(f) - N(f) \leq 0$, donc deux cas sont possibles :

- $a = N(f) \geq 0$;
- $a - N(f) < 0$ et $a \geq 0$.

Nous avons donc montré que si $f \in \mathcal{C}(T)$ est réelle positive, $\varphi(f)$ est un réel positif.

18) Soit $f \in \mathcal{C}(T)$ à valeurs réelles. $f + N(f)$ est à valeur réelles positives, donc $\varphi(f + N(f))$ est un réel positif. On en déduit que $\varphi(f) = \varphi(f + N(f)) - N(f)$ est réel.

Soit $f \in \mathcal{C}(T)$, décomposée sous la forme $f = g + ih$ avec g, h continues à valeurs réelles. Alors :

$$\overline{\varphi(f)} = \overline{\varphi(g + ih)} = \overline{\underbrace{\varphi(g)}_{\in\mathbb{R}} + i\underbrace{\varphi(h)}_{\in\mathbb{R}}} = \varphi(g) - i\varphi(h) = \varphi(g - ih) = \varphi(\overline{f})$$

On en déduit que $\varphi(q_n) = \varphi(\overline{p}_n) = \overline{\varphi(p_n)} = \overline{z^n} = \overline{z}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$: φ vérifie (c3).