Mines -Ponts MP 2009 Maths 1

Corrigé par L.Bouchikhi professeur de MP

(lahcen214@yahoo.fr)

A : Questions préliminaires

1. •Lapplication $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}, (x,t) \longmapsto e^{itx}.f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

   • $|\varphi(x,t)| \leq f(x)$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ et l'application $x \longmapsto f(x)$ est positive , continue intégrable sur $\mathbb{R}$

   Donc ϕ_f est existe et continue D'aprés le théorème de continuité sous le signe intégral

   De plus :

   • L'application $t \longmapsto \varphi(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $\frac{\partial^k \varphi}{\partial t^k}(x,t) = (ix)^k.e^{itx}.f(x)$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.

   • L'application $x \longmapsto \frac{\partial^k \varphi}{\partial t^k}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et$k \in \mathbb{N}$.

   • $|\frac{\partial^k \varphi}{\partial t^k}(x,t)| \leq |x^k|f(x)$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ et$k \in \mathbb{N}$

   • L'application $x \longmapsto |x^k|f(x)$ est positive , continue et intégrable sur $\mathbb{R}$

   Donc d'aprés le théorème de dérivation sous le signe intégral , ϕ_f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $\phi_f^{(k)}(t) = \int_{\mathbb{R}} (ix)^k.e^{itx}.f(x)dx$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$

2. L'inégualité de Taylor Lagrange entre $x \in \mathbb{R}$ et 0 à l'ordre $n-1$ ($n \geq 1$), appliquée à la fonction $x \longmapsto e^{ix}$ qui est de classe $\mathcal{C}^\infty$ donne : $|e^{ix} - \sum\limits_{m=0}^{n-1} \frac{(ix)^m}{m!}| \leq \frac{|x|^n}{n!} \sup\limits_{|t| \leq |x|} |i^n e^{it} = \frac{|x|^n}{n!}$

   Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \geq 1$:$|e^{ix} - \sum\limits_{m=0}^{n} \frac{(ix)^m}{m!}| \leq \frac{|x|^n}{n!}$

3. L'application $h_{a,b}$ est continue sur les intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ (d'aprés les théorèmmes généraux) et $\lim\limits_{t \longrightarrow 0} h_{a,b}(t) = \lim\limits_{t \longrightarrow 0} \frac{e^{-ibt}}{i}.\frac{e^{i(b-a)t}-1}{t} = b - a = h_{a,b}(0)$, donc $h_{a,b}$ est continue sur $\mathbb{R}$

4. On a : $|h_{a,b}(t)| = |\frac{e^{i(b-a)t}-1}{t}|$, donc en appliquant le résultat de la question $2)$ pour $n = 1$, on obtien le résultat.

5. On a : $e^k = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{k^n}{n!}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, donc $\forall n \in \mathbb{N}, e^k \geq \frac{k^n}{n!}$, et en particulier pour $n = k$, on obtien le résultat.

B : La fonction ϕ_f caractérise f

6. Si $\theta = 0$ alors $R(0,T) = 0$

   Si $\theta \neq 0$ alors par le changement $u = \theta t$, il vient $R(\theta,T) = \int_{-\theta T}^{\theta T} \frac{sinu}{u} du$;

   Comme l'application :$u \longmapsto \frac{sinu}{u}$ si $u \neq 0$ et 1 si $u = 0$ est continue , paire ona :$R(\theta,T) = 2.S(\theta T)$

7. Soient $T > 0$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$; On a : $R(x,T) - R(y,T) = 2.(S(xT) - S(yT))$ et S impaire , donc :

   $\star \lim\limits_{T \longrightarrow +\infty} R(x,T) - R(y,T) = 0$ si $x.y > 0$
   $\star \lim\limits_{T \longrightarrow +\infty} R(x,T) - R(y,T) = \pi$ si $x > 0$ et $y = 0$
   $\star \lim\limits_{T \longrightarrow +\infty} R(x,T) - R(y,T) = 2\pi$ si $x > 0$ et $y < 0$
   $\star \lim\limits_{T \longrightarrow +\infty} R(x,T) - R(y,T) = -\pi$ si $x < 0$ et $y = 0$
   $\star \lim\limits_{T \longrightarrow +\infty} R(x,T) - R(y,T) = -2\pi$ si $x < 0$ et $y > 0$

8. Notons $H : \mathbb{R} \times [-T,T] \longrightarrow \mathbb{C}, (x,t) \longmapsto h_{a,b}(t).e^{ixt} f(x)$; On a:

   $*$ H continue sur $\mathbb{R} \times [-T,T]$ (D'aprés les théorèmes généraux)

   $*$ $t \longmapsto H(x,t)$ est integrable sur $[-T,T]$, $\forall x \in \mathbb{R}$ et $x \longmapsto \int_{-T}^{T} H(x,t)dt$ est continue d'aprés le théorème de continuité sous le signe integral

   $*$ $x \longmapsto H(x,t)$ est integrable sur $\mathbb{R}$, $\forall t \in [-T,T]$ et $t \longmapsto \int_{-\infty}^{\infty} H(x,t)dx = h_{a,b}(t)\phi_f(t)$ est continue sur $[-T,T]$, donc integrable sur $[-T,T]$

   D'aprés le théorème de Fubini , H est integrable sur $\mathbb{R} \times [-T,T]$ et $\int_{-T}^{T} \int_{-\infty}^{\infty} H(x,t)dxdt = \int_{-T}^{T} h_{a,b}(t)\phi_f(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-T}^{T} H(x,t)dtdx = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-T}^{T} h_{a,b}(t).e^{ixt} f(x)dtdx$
   Or $\int_{-T}^{T} h_{a,b}(t).e^{ixt}dt = \int_{-T}^{T} \frac{e^{it(x-a)} - e^{it(x-b)}}{it} dt = R(x-a,T) - R(x-b,T)$, donc
   $\int_{-T}^{T} h_{a,b}(t)\phi_f(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x).[R(x-a,T) - R(x-b,T)]dx$
   Posons : $g_n(x) = f(x).[R(x-a,n) - R(x-b,n)] = f(x).[S(n(x-a)) - S(n(x-b))]$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$

   $*$ $(g_n)_{n \geq 0}$ converge simplement vers la fonction $g : x \longmapsto \begin{cases} 2\pi.f(x), & six \in]a,b[\\ \frac{\pi}{2}.f(a), & six = a \\ \frac{\pi}{2}.f(b), & six = b \\ 0 & , si \ non \end{cases}$, (d'aprés la question 7.)

   $*$ La fonction S est bornée sur $\mathbb{R}$ (Continue , impaire et admet une limite en $+\infty$), donc $|g_n(x)| \leq M.f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

   $*$ $x \longmapsto f(x)$ est positive continue et integrable sur $\mathbb{R}$

   D'aprés le théorème de la convergence dominée , $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g_n(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx = 2\pi \int_a^b f(x)dx$,

   donc : $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-n}^{n} h_{a,b}(t).e^{ixt}dtdx = 2\pi \int_a^b f(x)dx$ et par suite :
   $\lim\limits_{T \longrightarrow +\infty} \int_{-T}^{T} h_{a,b}(t)\phi_f(t)dt = \lim\limits_{T \longrightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-T}^{T} h_{a,b}(t).e^{ixt}dtdx = 2\pi \int_a^b f(x)dx$

9. S'il existe $(f,g) \in \mathbb{E}^2$ tel que $\phi_f = \phi_g$ et $f \neq g$, alors il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que :$a < b$ et $(f-g)_{/[a,b]}$ garde un signe constant. Or $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$ (d'aprés 8.) , donc $\int_a^b (f-g)(x)dx = 0$ ce qui contredit le fait que $f - g$ continue de signe constant sur [a,b] , d'ou le résultat.

L.Bouchikhi , Professeur de Spé. CPGE TAZA

C: La suite $a_k(f)$ ne caractérise pas toujours f

10. • La fonction f_0 est continue sur les intervalles $]-\infty,0]$ et $]0,+\infty[$ (les théorèmes généraux) ,

    de plus $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} f_0(x)=\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\ln x)^2}{2}-\ln x}=0=f_0(0)$, donc f_0 est continue positive sur $\mathbb{R}$.

    • $\forall X>0, \int_{-\infty}^{X} f_0(x)dx=\int_0^X \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\ln x)^2}{2}}\frac{dx}{x}$, en faisant le changement $u=\ln x$, on obtient :$\int_{-\infty}^{X} f_0(x)dx=\int_{-\infty}^{\ln X}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}du$ et à la limite quand $X\longrightarrow+\infty$, il vient :

    $\int_{-\infty}^{+\infty} f_0(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}du=1$ (D'aprés les données) ; D'où $f_0\in\mathbb{E}$

11. Soit $k\in\mathbb{N}$ et $X>0$, on a : $\int_{-\infty}^{X} x^k f_0(x)dx=\int_{-\infty}^{\ln X}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ku-\frac{u^2}{2}}du$ ($u=\ln x$) et à la limite quand $X\longrightarrow+\infty$ il vient :$\int_{-\infty}^{+\infty} x^k f_0(x)dx=e^{\frac{k^2}{2}}$, donc $x\longmapsto |x|^k f_0(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et f_0 admet des moments de toutes ordre et $a_k(f_0)=e^{\frac{k^2}{2}}$

12. • La fonction f_a est positive (car $a\sin(2\pi\ln x)\in[-1,1]$)

    • f_a est continue sur $\mathbb{R}$ et $f_a\leq 2.f_0$, donc f_a est integrable sur $\mathbb{R}$.

    • Soit $k\in\mathbb{N}$ et $X>0$, $\int_{-\infty}^{X} x^k f_a(x)dx=\int_{-\infty}^{\ln X}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ku-\frac{u^2}{2}}(1+\frac{a}{2i}(e^{2i\pi u}-e^{-2i\pi u}))du=$ $\int_{-\infty}^{\ln X}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ku-\frac{u^2}{2}}du+\frac{a}{2i}\int_{-\infty}^{\ln X}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{(k+2i\pi)u-\frac{u^2}{2}}du+\frac{a}{2i}\int_{-\infty}^{\ln X}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{(k-2i\pi)u-\frac{u^2}{2}}du$, à la limite quand $X\longrightarrow+\infty$ il vient : $\int_{-\infty}^{+\infty} x^k f_a(x)dx=e^{\frac{k^2}{2}}+\frac{a}{2i}e^{(\frac{k}{2}+i\pi)^2}-\frac{a}{2i}e^{(\frac{k}{2}-i\pi)^2}=a_k(f_0)+(-1)^k e^{(\frac{k}{4}-\pi^2)}-(-1)^k e^{(\frac{k}{4}-\pi^2)}=a_k(f_0)$

    • pour $k=0$ ona $\int_{-\infty}^{+\infty} f_a(x)dx=a_0(f_0)=1$

    Donc $f_a\in\mathbb{E}$ et $a_k(f_0)=a_k(f_a)$ pour tout $k\in\mathbb{N}$

D : Une condition sur la suite $a_k(f)$

13. Soit $k\in\mathbb{N}$, $(b_{2k+1}(f))^2=(\int_{-\infty}^{+\infty}|x|^k|x|^{k+1}f(x)dx)^2=(\int_{-\infty}^{+\infty}(|x|^k\sqrt{f(x)})(|x|^{k+1}\sqrt{f(x)})dx)^2\leq$ $(\int_{-\infty}^{+\infty}|x|^{2k}f(x)dx).(\int_{-\infty}^{+\infty}|x|^{2k+2}f(x)dx)$ (Inégalité de cauchy schwarz)

    Donc :$\forall k\in\mathbb{N}$, $(b_{2k+1}(f))^2\leq a_{2k}(f).a_{2k+2}(f)$

14. Soit $k\in\mathbb{N}$, on a :

    • $\frac{(b_{2k}(f))^{\frac{1}{2k}}}{2k}=\frac{(a_{2k}(f))^{\frac{1}{2k}}}{2k}\leq M\leq 2M$ et $a_{2k}(f)\leq(2kM)^{2k}$

    • $(b_{2k+1}(f))^{\frac{1}{2k+1}}\leq(a_{2k}(f))^{\frac{1}{2(2k+1)}}.(a_{2k+2}(f))^{\frac{1}{2(2k+1)}}\leq((a_{2k}(f))^{\frac{1}{2k}})^{\frac{k}{2k+1}}.((a_{2k+2}(f))^{\frac{1}{2k+2}})^{\frac{k+1}{2k+1}}\leq$ $(2kM)^{\frac{k}{2k+1}}.((2k+2)M)^{\frac{k+1}{2k+1}}\leq 2M.k^{\frac{k}{2k+1}}.(k+1)^{\frac{k+1}{2k+1}}$

    Or $t\longmapsto t^{\frac{k}{2k+1}}$ est croissante sur $]0,+\infty[$, donc $k^{\frac{k}{2k+1}}.(k+1)^{\frac{k+1}{2k+1}}\leq(k+1)^{\frac{k(k+1)}{(2k+1)^2}}\leq k+1\leq 2k+1$

    d'où $\frac{(b_{2k+1}(f))^{\frac{1}{2k+1}}}{2k+1}\leq 2M.\frac{2k+1}{2k+1}=2M$

    Finalement : $\forall k\in\mathbb{N}$, $\frac{(b_k(f))^{\frac{1}{k}}}{k}\leq 2M$

15. Soient $x, h \in \mathbb{R}$ et n entier ≥ 1

$\phi_f(x+h) - \sum\limits_{m=0}^{n-1} \frac{(h)^m}{m!}\phi_f^{(m)}(x) = (\int_{-\infty}^{+\infty} f(t).e^{i(x+h)t}dt - \sum\limits_{m=0}^{n-1} \frac{(h)^m}{m!} \int_{-\infty}^{+\infty} (it)^m e^{ixt} f(t)dt)$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t).e^{ixt}.(e^{iht} - \sum\limits_{m=0}^{n-1} \frac{(iht)^m}{m!})dt.$ En appliquant 2. , il vient :

$|\phi_f(x+h) - \sum\limits_{m=0}^{n-1} \frac{(h)^m}{m!}\phi_f^{(m)}(x)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} f(t).|e^{iht} - \sum\limits_{m=0}^{n-1} \frac{(iht)^m}{m!}|dt \leq \int_{-\infty}^{+\infty} f(t).\frac{|ht|^n}{n!}dt = \frac{|h|^n}{n!}.b_n(f)$

16. Il suffit de montrer que : $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \frac{|h|^n}{n!}.b_n(f) = 0$, pour un certain $A > 0$ tel que :$|h| < A$.

On sait que $\frac{(b_n(f))^{\frac{1}{n}}}{n} \leq 2M$, donc $b_n(f) \leq (2nM)^n$ et $\frac{|h|^n}{n!}.b_n(f) \leq \frac{(2nM|h|)^n}{n!} = \frac{n^n}{n!}.|2Mh|^n$

En appliquant 5. , il vient : $\frac{|h|^n}{n!}.b_n(f) \leq |2Mhe|^n$, donc : $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \frac{|h|^n}{n!}.b_n(f) = 0$, dés que $|h| < A = \frac{1}{2Me}$

ainsi :$\phi_f(x+h) - \sum\limits_{m=0}^{+\infty} \frac{(h)^m}{m!}\phi_f^{(m)}(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $h \in]-A, A[$

17. Soit $\ell > 0$ un entier . On a :

$\phi_f^{(k)}(0) = i^k \int_{-\infty}^{+\infty} x^k.f(x)dx = i^k a_k(f) = i^k a_k(g) = i^k \int_{-\infty}^{+\infty} x^k.g(x)dx = \phi_g^{(k)}(0)$, pour tout $k \in \mathbb{N}$

Or $\phi_f(h) = \sum\limits_{m=0}^{+\infty} \frac{h^m}{m!}\phi_f^{(m)}(0)$ et $\phi_g(h) = \sum\limits_{m=0}^{+\infty} \frac{h^m}{m!}\phi_g^{(m)}(0)$, pour tout $h \in]-A, A[$, donc $\phi_f^{(m)}(h) = \phi_g^{(m)}(h)$, pour tout $h \in]-A, A[$ et $m \in \mathbb{N}$

<u>*Récurrence sur $\ell \in \mathbb{N}^*$*</u>

Pour $\ell = 1$, on a : $]\frac{-A}{2}, \frac{A}{2}[\subset]-A, A[$, donc $\phi_f^{(m)}(h) = \phi_g^{(m)}(h)$, pour tout $h \in]-A, A[$ et $m \in \mathbb{N}$

Soit $\ell > 0$ un entier , supposons : $\phi_f^{(m)}(h) = \phi_g^{(m)}(h)$, pour tout $h \in]\frac{-\ell A}{2}, \frac{\ell A}{2}[$ et $m \in \mathbb{N}$

Soit $h \in]\frac{-(\ell+1)A}{2}, \frac{(\ell+1)A}{2}[$, alors $h - \frac{A}{2} \in]\frac{-\ell A}{2}, \frac{\ell A}{2}[$

par la question 16. on a: $\phi_f(h) = \phi_f(h - \frac{A}{2} + \frac{A}{2}) = \sum\limits_{m=0}^{+\infty} \frac{(\frac{A}{2})^m}{m!}\phi_f^{(m)}(h - \frac{A}{2})$

et par hypothèse de récurrence , $\phi_f^{(m)}(h - \frac{A}{2}) = \phi_g^{(m)}(h - \frac{A}{2})$ pour tout $m \in \mathbb{N}$,

donc $\phi_f^{(m)}(h) = \phi_g^{(m)}(h)$,pour tout $m \in \mathbb{N}$

Ainsi la récurrence établie , et $\phi_f = \phi_g$ sur $]\frac{-\ell A}{2}, \frac{\ell A}{2}[$ pour tout $\ell > 0$ entier

18. On a: $(]\frac{-\ell A}{2}, \frac{\ell A}{2}[)_{\ell\geq1}$ est une suite exhaustive d'intervalle de $\mathbb{R}$, et $\phi_f = \phi_g$ sur $]\frac{-\ell A}{2}, \frac{\ell A}{2}[$ pour tout $\ell > 0$ entier , donc $\phi_f = \phi_g$ sur $\mathbb{R}$ et par suite $f = g$ d'aprés 9.

<u>*Conclusion:*</u>

Si $f, g \in \mathbb{E}$ admettent des moments de tous ordres , vérifiant la condition (**U**) , alors $f = g$

E : Application

19. Si $f \in\ E$ est solution du système en question alors : f admet des moments de tous ordres et $a_0(f) = 1$, $a_{2k+1}(f) = 0$, $a_{2k}(f) = \frac{(2k)!}{2^k k!}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$

    De plus $\frac{(a_{2k}(f))^{\frac{1}{2k}}}{2k} = \frac{1}{2k}(\frac{(2k)!}{2^k k!})^{\frac{1}{2k}} \sim \frac{1}{2k}.\sqrt{k}.2^{\frac{1}{2k}} \longrightarrow 0$ (D'aprés la formule de stirling)

    donc la suite $(a_{2k}(f))_{k\geq 1}$ vérifie la propriètè (**U**)

    Daprés la question 16. , $\exists A > 0$ tel que $\phi_f(x) = \sum\limits_{m=0}^{+\infty} \frac{(x)^m}{m!}\phi_f^{(m)}(0)$, pour tout $x \in]-A, A[$

    Or $\phi_f^{(m)}(0) = i^m.a_m(f)$ donc $\phi_f(x) = \sum\limits_{m=0}^{+\infty}(-1)^m.\frac{(\frac{x}{2})^{2m}}{(2m)!} = e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt-\frac{t^2}{2}}dt = \phi_g(x)$, pour tout $x \in]-A, A[$ où $g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

    Comme $g \in \mathbb{E}$ et $\phi_f^{(m)}(0) = i^m.a_m(f) = \phi_g^{(m)}(0) = i^m.a_m(g)$ alors $a_k(f) = a_k(g)$, $\forall k \in \mathbb{N}$

    Ainsi $f$et g vérifient les conditions de la partie **D**. , donc $f = g$

    Réciproquement :

    la fonction $g : t \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}$ est solution du système en question .

    En coclusion : $g : t \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}$ est l'unique solution du système .

Fin

L.Bouchikhi , Professeur de Spé. CPGE TAZA