Mines 2008 - MP - Maths 1

I - Permanents

On note $\mathcal{S}_n$ le groupe des permutations de $I_n = \{1, \ldots, n\}$.

1 - Soit $M = (m_1, \ldots, m_n) \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbf{R})$. On a alors $|\operatorname{per} M| \leq \displaystyle\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \prod_{i=1}^{n} |m_{i,\sigma(i)}|$. Classiquement $|m_{i,\sigma(i)}| \leq \|m_{\sigma(i)}\|$; d'autre part, puisque σ est une permutation, $\sigma(i)$ décrit I_n quand i décrit I_n, donc, pour tout $\sigma \in \mathcal{S}_n$: $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} |m_{i,\sigma(i)}| \leq \prod_{i=1}^{n} \|m_{\sigma(i)}\| = \prod_{j=1}^{n} \|m_j\|$.

Enfin la somme contient $\operatorname{Card} \mathcal{S}_n = n!$ termes, ce qui fournit bien

$$|\operatorname{per} M| \leq n! \prod_{j=1}^{n} \|m_j\|$$

2 - Soient $M = (m_1, \ldots, m_n)$, $R = (r_1, \ldots, r_n)$, et $P_j = (m_1, \ldots, m_j, r_{j+1}, \ldots, r_n)$ pour $j \in \{0, \ldots, n\}$. On a en particulier $P_0 = R$ et $P_n = M$, donc par télescopage

$$|\operatorname{per} M - \operatorname{per} P| = \left|\sum_{j=1}^{n} (\operatorname{per} P_j - \operatorname{per} P_{j-1})\right| \leq \sum_{j=1}^{n} |\operatorname{per} P_j - \operatorname{per} P_{j-1}|$$

Or $\operatorname{per} P_j - \operatorname{per} P_{j-1} = \operatorname{per}(m_1, \ldots, m_{j-1}, m_j - r_j, r_{j+1}, \ldots, r_n)$ par multilinéarité. Il ne reste donc qu'à appliquer l'inégalité du 1 à ce dernier permanent pour obtenir le résultat demandé.

3 - Supposons dans un premier temps $j = n$. Pour tout $i \in I_n$, notons $\mathcal{P}_i$ l'ensemble des permutations σ de I_n vérifiant $\sigma(i) = n$; cela revient à dire que $\sigma^{-1}(n) = i$, $\mathcal{S}_n$ est donc la réunion disjointe des $\mathcal{P}_i$. Par suite $\operatorname{per} M = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_{i,n} \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_i} \prod_{k \neq i} m_{k,\sigma(k)}$.

Fixons $i \in I_n$. Posons $M' = M(i \,|\, n)$. Soit τ la bijection de $I_n \backslash \{i\}$ dans I_{n-1} qui associe à un numéro de ligne dans M, le numéro de la ligne correspondante dans M' ; autrement dit, $\tau(k)$ vaut k si $k < i$, $k-1$ sinon. On a alors $\displaystyle\prod_{k \neq i} m_{k,\sigma(k)} = \prod_{k \neq i} m'_{\tau(k),\sigma(k)} = \prod_{l=1}^{n-1} m'_{l,\sigma(\tau^{-1}(l))}$ par le changement d'indice $l = \tau(k)$.

Si $\sigma \in \mathcal{P}_i$, alors elle réalise une bijection de I_{n-1} dans $I_n \backslash \{i\}$, donc $\sigma' : l \longmapsto \sigma(\tau^{-1}(l))$ est une permutation de I_{n-1}. L'application $\sigma \longmapsto \sigma'$ est clairement injective (composition par une bijection), et les ensembles $\mathcal{P}_i$ et $\mathcal{S}_{n-1}$ ont mêmes cardinaux, donc $\sigma \longmapsto \sigma'$ est une bijection de l'un dans l'autre. Par suite

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{P}_i} \prod_{k \neq i} m_{k,\sigma(k)} = \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_i} \prod_{l=1}^{n-1} m'_{l,\sigma(\tau^{-1}(l))} = \sum_{\sigma' \in \mathcal{S}_{n-1}} \prod_{l=1}^{n-1} m'_{l,\sigma'(l)} = \operatorname{per} M'$$

ce qui fournit le résultat demandé dans le cas $j = n$.

Le cas général s'y ramène immédiatement grâce à la symétrie du permanent, puisque per M est le permanent de la matrice obtenue en permutant les colonnes j et n.

II - Formes quadratiques

4 - Si H et G ne sont pas en somme directe, alors leur intersection contient un vecteur u non nul, et donc le vecteur $v = u/\|u\|$ appartient à $H \cap G \cap S$. Mais alors on doit avoir $\Phi_Q(v) \geq 0$ puisque $H \in \mathcal{V}_0^+$, et $\Phi_Q(v) < 0$ puisque $G \in \mathcal{V}^-$, contradiction.

Puisque les dimensions possibles des sous-espaces sont en nombre fini, il existe $H_0 \in \mathcal{V}^+$ vérifiant $r(\Phi_Q) = \dim H_0$, et $G_0 \in \mathcal{V}^-$ vérifiant $s(\Phi_Q) = \dim G_0$. Puisque $\mathcal{V}^+ \subset \mathcal{V}_0^+$, ces deux sous-espaces sont en somme directe d'après ce qui précède, et donc $r(\Phi_Q) + s(\Phi_Q) = \dim(H_0 + G_0) \leq \dim \mathbf{R}^n = n$.

5 - Puisque Q est symétrique réelle, on sait que $\mathbf{R}^n$ admet une base orthonormale de vecteurs propres pour Q. Posons $p = n^+(Q)$, et choisissons une telle base orthonormale $(e_1, \ldots, e_n)$, en numérotant les vecteurs de manière à ce que les p premiers vecteurs de la base soient associés à des valeurs propres strictement positives, notées $\mu_1, \ldots, \mu_p$. Soit enfin $H = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$.

Si $u = \sum_{i=1}^p x_i e_i \in H \setminus \{0\}$, alors un calcul classique fournit $\Phi_Q(u) = \sum_{i=1}^p \mu_i x_i^2 > 0$ et donc $H \in \mathcal{V}^+$. Par suite $r(\Phi_Q) \geq \dim H = n^+(Q)$.

6 - On a donc $n^+(Q) + n^-(Q) \leq r(\Phi_Q) + s(\Phi_Q) \leq n$. Or Q est inversible, donc 0 n'en est pas une valeur propre ; et Q est diagonalisable, donc a n valeurs propres réelles. Par suite $n^+(Q) + n^-(Q) = n$, ce qui entraine $r(\Phi_Q) = n^+(Q)$ et $s(\Phi_Q) = n^-(Q)$.

7 - Soient $H \in \mathcal{V}^+$ de dimension $r(\Phi_Q)$, et $G \in \mathcal{V}^-$ de dimension $s(\Phi_Q)$.

Alors $S \cap H$ est la sphère unité de l'espace de dimension finie H, donc est un compact de H. D'autre part, Φ_Q, en tant que forme quadratique, est continue sur $S \cap H$. Elle atteint donc un minimum m en un point u_1 de $S \cap H$; et, puisque $u_1 \in S \cap H$, on a $m > 0$. Posons $\delta_1 = m/2$.

Supposons $\kappa \leq \delta_1$. Alors, si $x \in S \cap H$, $\Phi_R(x) \geq \Phi_Q(x) - \kappa\|x\|^2 \geq m - m/2 > 0$. Donc Φ_R est strictement positive sur $S \cap H$, et donc $r(\Phi_R) \geq \dim H = r(\Phi_Q)$.

De même, en prenant $\delta_2 = -M/2 > 0$ où M est le maximum de Φ_Q sur $S \cap G$, on montre que $s(\Phi_R) \geq \dim G = s(\Phi_Q)$ si $\kappa \leq \delta_2$.

Prenons alors $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Si $\kappa \leq \delta$, alors $r(\Phi_R) \geq r(\Phi_Q)$ et $s(\Phi_R) \geq s(\Phi_Q)$. Mais, d'après les questions précédentes, $r(\Phi_R) + s(\Phi_R) = r(\Phi_Q) + s(\Phi_Q) = n$, et donc les inégalités précédentes sont des égalités.

III - Espaces de Lorentz

8 - Supposons $\varphi(\lambda) \geq 0$ pour tout λ. Soit $H = \mathrm{Vect}(a, b)$ (de dimension 2 puisque (a, b) est libre), soit $u = \alpha a + \beta b \in H$.

Si $\beta = 0$, alors $\Phi_Q(u) = \alpha^2 \Phi_Q(a) \geq 0$; sinon, $\Phi_Q(u) = \beta^2 \Phi_Q\big(b + (\alpha/\beta)a\big) = \beta^2 \varphi(\alpha/\beta) \geq 0$. Donc Φ_Q est positive ou nulle sur H, et donc $H \in \mathcal{V}_0^+$.

Soit alors $G \in \mathcal{V}^-$ de dimension $n - 1 = s(\Phi_Q)$. D'après la question 4, G et H sont en somme directe, alors que la somme de leurs dimensions est strictement plus grande que n : on aboutit donc à une contradiction, φ prend donc obligatoirement des valeurs strictement négatives.

9 - Puisque $\Phi_Q(a) > 0$, a n'est pas nul. Si (a, b) est liée, on peut donc trouver $\alpha \in \mathbf{R}$ tel que $b = \alpha a$. On a alors $B_Q(a, b)^2 = \alpha^2 \Phi_Q(a) = \Phi_Q(a)\Phi_Q(b)$: l'inégalité est vérifiée, et on a égalité.

Supposons maintenant (a, b) libre. Alors $\varphi(\lambda) = \Phi_Q(a)\lambda^2 + 2B_Q(a, b)\lambda + \Phi_Q(b)$ est un trinôme du second degré en λ puisque $\Phi_Q(a) \neq 0$, dans lequel le coefficient de λ^2 est strictement positif, et qui prend des valeurs strictement négatives d'après la question précédente. Son discriminant est donc strictement positif, ce qui donne $B_Q(a, b)^2 > \Phi_Q(a)\Phi_Q(b)$. L'inégalité est donc vérifiée, et on n'a pas égalité.

IV - Inégalité d'Alexandrov

10 - Le polynôme caractéristique de Q est $X^2 - 1$, donc ses valeurs propres sont -1 et 1. Par suite Q est symétrique et inversible, les résultats du **II** s'appliquent : donc $r(\Phi_Q) = n^+(Q) = 1$ et $s(\Phi_Q) = n^-(Q) = 1$.

11 - Soit $j \in I_n$. Notons déjà que la formule de développement de la question 3 fournit, pour tout $(n-1)$-uplet $(u_1, \ldots, u_{n-1})$ de vecteurs de $\mathbf{R}^n$: $\mathrm{per}(u_1, \ldots, u_{n-1}, e_j) = \mathrm{per}(u_1(j), \ldots, u_{n-1}(j))$.

Soit $c \in \mathbf{R}^n$. Pour alléger les écritures, posons $c' = c(j)$ et, pour tout $i \in I_n$, $m'_i = m_i(j)$.

Considérons l'application φ qui, à un couple (x, y) de vecteurs de $\mathbf{R}^{n-1}$, associe le nombre $\mathrm{per}(m'_1, \ldots, m'_{n-3}, x, y)$. Par symétrie et multilinéarité du permanent, φ est une forme bilinéaire symétrique. La matrice de la forme quadratique associée, dans la base canonique $(e'_1, \ldots e'_{n-1})$ de $\mathbf{R}^{n-1}$, a pour coefficients les nombres $\varphi(e'_k, e'_l) = \mathrm{per}(m'_1, \ldots, m'_{n-3}, e'_k, e'_l)$.

Cette matrice Q' est donc la matrice associée par l'énoncé du théorème à la famille de vecteurs $(m'_1, \ldots, m'_{n-1})$ de $\mathbf{R}^{n-1}$, dont les coordonnées sont strictement positives ; par hypothèse de récurrence, $(\mathbf{R}^{n-1}, Q')$ est donc un espace de Lorentz.

D'autre part, les coordonnées des m'_i étant strictement positives, il est clair par définition du permanent que $\Phi_{Q'}(m'_{n-2}) > 0$.

D'après la question 9, on peut donc conclure que $\varphi(m'_{n-2}, c')^2 \geq \Phi_{Q'}(m'_{n-2})\Phi_{Q'}(c')$ avec égalité si et seulement si m'_{n-2} et c' sont colinéaires ; ce qui constitue le résultat demandé, compte tenu de la remarque faite au début de la question.

12 - Notons déjà que, en adaptant un raisonnement fait à la question précédente, on voit facilement que $\Phi_Q(u, v) = \mathrm{per}(m_1, \ldots, m_{n-2}, u, v)$ pour tout couple (u, v) de vecteurs de $\mathbf{R}^n$. On en déduit

$$\begin{aligned} 0 = Qc \cdot c = \Phi_Q(c) &= \mathrm{per}(m_1, \ldots, m_{n-2}, c, c) \\ &= \mathrm{per}(m_1, \ldots, m_{n-3}, c, c, m_{n-2}) \\ &= \sum_{j=1}^{n} m_{n-2,j}\, \mathrm{per}(m_1, \ldots, m_{n-3}, c, c, e_j) \end{aligned}$$

par linéarité par rapport à la dernière variable.

13 - Compte tenu des remarques précédentes, le premier permanent est $\Phi_Q(c, e_j) = e_j \cdot Qc = 0$.

Comme vu en 11, le deuxième permanent vaut $\mathrm{per}(m_1(j), \ldots, m_{n-2}(j), m_{n-2}(j))$, et donc est strictement positif, puisque les coordonnées des vecteurs concernés sont toutes strictement positives.

14 - Soit donc c tel que $Qc = 0$. En appliquant l'inégalité du 11, l'égalité du 13 fournit pour tout j : $\operatorname{per}(m_1, \dots, m_{n-2}, m_{n-2}, e_j) \times \operatorname{per}(m_1, \dots, m_{n-3}, c, c, e_j) \leq 0$.

De plus $\operatorname{per}(m_1, \dots, m_{n-2}, m_{n-2}, e_j) > 0$ donc $\operatorname{per}(m_1, \dots, m_{n-3}, c, c, e_j) \leq 0$ pour tout j.

Enfin, puisque les nombres $m_{n-2,j}$ sont tous strictement positifs, l'égalité du 12 montre que $\operatorname{per}(m_1, \dots, m_{n-3}, c, c, e_j) = 0$ pour tout j.

On a donc en fait égalité dans l'inégalité du 11, donc, puisque $m_{n-2}(j) \neq 0$, il existe λ_j tel que $c(j) = \lambda_j m_{n-2}(j)$. Puisque $\operatorname{per}(u_1, \dots, u_{n-1}, e_j)$ ne dépend pas des j-ièmes composantes des u_i, on en déduit

$$\begin{aligned} 0 &= \operatorname{per}(m_1, \dots, m_{n-3}, c, c, e_j) = \operatorname{per}(m_1, \dots, \lambda_j m_{n-2}, \lambda_j m_{n-2}, e_j) \\ &= \lambda_j^2 \operatorname{per}(m_1, \dots, m_{n-2}, m_{n-2}, e_j) \end{aligned}$$

et donc $\lambda_j = 0$ pour tout j, d'où $c = 0$. La matrice Q est donc inversible.

15 - Par définition du permanent, pour tout (i, j), le coefficient en position (i, j) de Q_0 vaut $B_0(e_i, e_j) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} e_{i,\sigma(n-1)} e_{j,\sigma(n)}$. C'est donc le nombre de permutations de $\mathcal{S}_n$ vérifiant $\sigma(n-1) = i$ et $\sigma(n) = j$; il vaut donc 0 si $i = j$, $(n-2)!$ sinon.

Considérons la matrice $J \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ dont tous les coefficients valent $(n-2)!$. Clairement J est de rang 1, donc admet 0 pour valeur propre à l'ordre $n-1$; et sa dernière valeur propre vaut $\operatorname{tr} J - (n-1) \times 0 = n(n-2)!$.

Puisque $Q_0 = J - (n-2)! I_n$, ses valeurs propres sont $-(n-2)!$, à l'ordre $n-1$, et $n(n-2)! - (n-2)! = (n-1)!$ à l'ordre 1.

Puisque 0 n'est pas valeur propre, Q_0 est symétrique réelle et inversible : la partie **III** fournit donc $r(\Phi_{Q_0}) = n^+(Q_0) = 1$ et $s(\Phi_{Q_0}) = n^-(Q_0) = n-1$.

16 - Pour alléger les écritures, posons $p_i = \theta m_i + (1-\theta)e$ et $p'_i = \theta' m_i + (1-\theta')e$ pour tout $i \in I_{n-2}$. Soient x et y dans $\mathbf{R}^n$. La question 2 fournit

$$|B_\theta(x, y) - B_{\theta'}(x, y)| \leq n! \sum_{j=1}^{n-2} \|p_1\| \cdots \|p_{j-1}\| \, \|p_j - p'_j\| \, \|p'_{j+1}\| \cdots \|p'_{n-2}\| \, \|x\| \, \|y\|$$

les deux derniers termes de la somme du 2 étant ici nuls.

Or, puisque $\theta \in [0, 1]$, on a pour tout i $\|p_i\| \leq \theta \|m_i\| + (1-\theta)\|e\| \leq \|m_i\| + \|e\| = \|m_i\| + \sqrt{n}$; de même $\|p'_i\| \leq \|m_i\| + \sqrt{n}$; et, pour tout j, $\|p_j - p'_j\| = |\theta - \theta'| \, \|m_j - e\| \leq |\theta - \theta'|(\|m_j\| + \sqrt{n})$.

En remplaçant dans l'inégalité précédente, on obtient le résultat demandé, avec un facteur $n-2$ au lieu du facteur n demandé, d'où l'on déduit immédiatement l'inégalité cherchée.

17 - Notons déjà que, pour tout $\theta \in [0, 1]$, les composantes des vecteurs $\theta m_i + (1-\theta)e$ sont toutes strictement positives (barycentres à coefficients positifs de nombres strictement positifs). On peut donc en particulier appliquer le résultat de la question 14 à Q_θ, ce qui montre que Q_θ est symétrique réelle et inversible pour tout $\theta \in [0, 1]$.

Soit alors $\theta \in [0, 1]$. En combinant les résultats des questions et 16, on en déduit qu'il existe $\delta > 0$ tel que, si $n.n! |\theta - \theta'| \prod_{j=1}^{n-2} (\|m_j\| + \sqrt{n}) \leq \delta$ alors $r(\Phi_{Q_\theta}) = r(\Phi_{Q_{\theta'}})$.

En posant $\alpha = \delta\Big(n.n!\prod_{j=1}^{n-2}(\|m_j\| + \sqrt{n})\Big)^{-1}$, on en déduit que l'application $\theta' \longmapsto r(\Phi_{Q_{\theta'}})$ est constante sur $[\theta - \alpha, \theta + \alpha] \cap [0, 1]$, donc en particulier continue en θ.

Mais alors cette application est continue sur l'intervalle $[0, 1]$ et à valeurs dans $\mathbf{Z}$, elle est donc constante sur $[0, 1]$, et donc $r(\Phi_{Q_1}) = r(\Phi_{Q_0}) = 1$. L'égalité pour s se démontre de même.

18 - Puisque Q_1 est la matrice Q de l'énoncé du théorème, les résultats des questions 14 et 17 finissent d'établir le théorème 1 : donc $(\mathbf{R}^n, Q)$ est un espace de Lorentz.

D'autre part, $\Phi_Q(m_{n-1}) = \mathrm{per}(m_1, \ldots, m_{n-1}, m_{n-1}) > 0$ (vecteurs à coordonnées strictement positives). On peut donc appliquer le résultat de la question 9 au couple $(a, b) = (m_{n-1}, b)$, ce qui fournit l'inégalité demandée.