## Corrigé de la seconde épreuve de mathématiques

## Mines 2007 - Filière MP

### I Algèbres de Lie

**1 -** Pour toute matrice $M$ de $\mathcal{V}$, $X$ est un vecteur propre de $M$ : il existe donc un unique scalaire $\lambda(M)$ tel que $MX = \lambda(M)X$. Pour $M_1, M_2 \in \mathcal{V}$ et $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{C}$,

$$(\mu_1 M_1 + \mu_2 M_2)X = (\mu_1 \lambda(M_1) + \mu_2 \lambda(M_2))X$$

et donc $\lambda(\mu_1 M_1 + \mu_2 M_2) = \mu_1 \lambda(M_1) + \mu_2 \lambda(M_2)$ : l'application $\lambda : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{C}$ est bien une forme linéaire.

**2 -** Comme $M$ et $A$ sont éléments de $\mathcal{U}$, $[M, A] \in [\mathcal{U}]$ et donc $[M, A] \in \mathcal{V}$.

**3 -** Considérons l'hypothèse de récurrence $(H_i)$ :

$$\forall M \in \mathcal{V},\ MX_i = \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \lambda_{i-j}(M) X_j$$

- La propriété $H_0$ est trivialement vérifiée :

$$\forall M \in \mathcal{V},\ MX_0 = MX = \lambda(M)X = \lambda_0(M)X_0 = \sum_{j=0}^{0} \binom{0}{j} \lambda_{-j}(M) X_j$$

- Soit $i \in \mathbb{N}$ et supposons que $H_i$ soit vérifiée. Alors pour tout $M \in \mathcal{V}$ :

$$MX_{i+1} = MAX_i = [M, A]X_i + AMX_i$$

En appliquant $(H_i)$ aux deux éléments $M$ et $[M, A]$ de $\mathcal{V}$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
MX_{i+1} &= \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \lambda_{i-j}([M, A]) X_j + A \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \lambda_{i-j}(M) X_j \\
&= \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \lambda_{i-j+1}(M) X_j + \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \lambda_{i-j}(M) X_{j+1} \\
&= \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \lambda_{i-j+1}(M) X_j + \sum_{j=1}^{i+1} \binom{i}{j-1} \lambda_{i-j+1}(M) X_j \\
&= \lambda_{i+1}(M) X_0 + \sum_{j=1}^{i} \underbrace{\left[\binom{i}{j} + \binom{i}{j-1}\right]}_{=\binom{i+1}{j}} \lambda_{i-j+1}(M) X_j + \lambda_0(M) X_{i+1} \\
&= \sum_{j=0}^{i+1} \binom{i+1}{j} \lambda_{i+1-j}(M) X_j
\end{aligned}$$

Nous avons donc démontré par récurrence que $(H_i)$ est vérifiée pour tout $i \in \mathbb{N}$, ce qui donne bien les identités (1) et (2).

**4 -** L'ensemble des entiers $i \geq 0$ pour lesquels la famille $\{X_0, X_1, \ldots, X_i\}$ est libre est non vide (il contient 0 car $X_0$ est non nul) et majoré par $n$ : il admet donc un plus grand élément $q$.

**5 -** La stabilité de $G$ par $\overline{M}$ découle directement des relations (1).

D'autre part :

- pour $i$ compris entre 0 et $q-1$, $\overline{A}(X_i) = AX_i = X_{i+1} \in G$ ;
- $\overline{A}(X_q) = X_{q+1} \in G$ car $\{X_0, X_1, \ldots, X_q\}$ est libre et $\{X_0, X_1, \ldots, X_{q+1}\}$ est liée,

donc $G$ est également stable par $\overline{A}$.

Enfin, par composition, $G$ est stable par $\overline{[M,A]}$. On en déduit que $\overline{M_G}$, $\overline{A_G}$ et $\overline{[M,A]}_G$ sont des endomorphismes de $G$.

**6 -** Comme $\overline{[M,A]}_G = \overline{M}_G \circ \overline{A}_G - \overline{A}_G \circ \overline{M}_G$, la trace de $\overline{[M,A]}_G$ est nulle (linéarité de la trace et propriété classique $\mathrm{Tr}(f \circ g) = \mathrm{Tr}(g \circ f)$).

**7 -** Les relations (2) montrent que cette matrice est triangulaire supérieure, de terme général $\begin{pmatrix} i-1 \\ j-1 \end{pmatrix} \lambda_{i-j+1}(M)$ pour $1 \leq j \leq i \leq q+1$.

**8 -** En particulier, $0 = \mathrm{Tr}(\overline{[M,A]}_G) = (q+1)\lambda_1(M) = (q+1)\lambda([M,A])$ et $\lambda([M,A]) = 0$ puisque $q+1 > 0$.

**9 -** Nous en déduisons que $MAX = AMX$, i.e. $M(AX) = A(\lambda(M)X) = \lambda(M)(AX)$. Ainsi, ou bien $AX = 0$, ou bien $AX$ est un vecteur propre pour chaque matrice $M$ de $\mathcal{V}$, associé à la même valeur propre que $X$.

## II Algèbres de Lie résolubles

**10 -** Cette propriété traduit que les endomorphismes associés aux éléments de $\mathcal{U}$ sont simultanément trigonalisables, i.e. trigonalisables dans une même base de $\mathbb{C}^n$.

**11 -** Pour tout $k$ compris entre 0 et $n$, notons $E_k$ le sous-espace de $\mathbb{C}^n$ engendré par les $k$ premiers vecteurs colonnes de la matrice $P$. Une matrice $A$ est donc dans $\mathcal{N}_k$ si et seulement si

$$\overline{A}(E_n) \subset E_{n-k},\ \overline{A}(E_{n-1}) \subset E_{n-1-k},\ \ldots,\ \overline{A}(E_k) \subset E_0.$$

Pour $k$ entier compris entre 0 et $n-1$, montrons que $[\mathcal{N}_k] \subset \mathcal{N}_{k+1}$ :

- si $k \geq 1$ et si $A$ et $B$ sont deux éléments de $\mathcal{N}_k$, on a pour tout $i$ compris entre $k+1$ et $n$ :

$$\begin{array}{rcl} \overline{[A,B]}(E_i) & \subset & \overline{A}(\overline{B}(E_i)) + \overline{B}(\overline{A}(E_i)) \\ & \subset & \overline{A}(E_{i-k}) + \overline{B}(E_{i-k}) \\ & \subset & E_{i-k-1} \end{array}$$

  car $k \geq 1$. On a donc $[A,B] \in \mathcal{N}_{k+1}$.

- si $k = 0$ et si $A$ et $B$ sont deux éléments de $\mathcal{N}_k$, les matrices $AB$ et $BA$ sont triangulaires supérieures et ont même diagonale : la matrice $[A,B]$ est donc diagonale supérieure stricte, i.e. que $[A,B] \in \mathcal{N}_{k+1}$.

Dans tous les cas, $[\mathcal{N}_k] \subset \mathcal{N}_{k+1}$ puisque $\mathcal{N}_{k+1}$ est un sous-espace vectoriel.

Ceci prouve que la suite $(\mathcal{N}_0, \mathcal{N}_1, \dots, \mathcal{N}_n)$ est une suite d'algèbres de Lie vérifiant les propriétés (A) et (B) : $\mathcal{T}_P$ est donc une algèbre de Lie résoluble de longueur $n$.

**Remarques :** la longueur obtenue ici n'est pas optimale. Par exemple, quand $n = 4$, $\mathcal{T}_P$ est une algèbre de Lie résoluble de longueur 3, puisque $[\mathcal{N}_2] = \{0\}$.

Cette question prouve en fait une implication du théorème 2 : si $\mathcal{U}$ est une algèbre de Lie dont les éléments sont simultanément trigonalisables, il existe une matrice inversible $P$ telle que $\mathcal{U} \subset \mathcal{T}_P$. On obtient alors que $\mathcal{U}$ est résoluble de longueur $n$ en considérant la suite $(\mathcal{U} \cap \mathcal{N}_k)_{0 \leq k \leq n}$.

**12 -** Nous avons $[\mathcal{U}] = [\mathcal{U}_0] \subset \mathcal{U}_1 = \{0\}$, donc $[M, M'] = 0$ pour tous $M, M' \in \mathcal{U}$ : les éléments de $\mathcal{U}$ commutent deux à deux.

**13 -** Prouvons le résultat suivant par récurrence sur $r$ : $r$ endomorphismes d'un espace vectoriel complexe de dimension finie non nulle qui commutent deux à deux possèdent un vecteur propre commun.

- Si $r = 1$ et si $f_1 \in \mathcal{L}(E)$ avec $E$ espace complexe de dimension non nulle, $f_1$ possède au moins une valeur propre (son polynôme caractéristique est de degré au moins 1 et $\mathbb{C}$ est algébriquement clos), donc également un vecteur propre.

- Soit $r \geq 1$. Supposons la propriété vérifiée au rang $r$ et considérons une famille $(f_i)_{1 \leq i \leq r+1}$ d'endomorphismes d'un espace vectoriel complexe $E$ de dimension non nulle. $f_{r+1}$ possède au moins une valeur propre $\lambda$ : notons $F = \mathrm{Ker}\,(f_{r+1} - \lambda Id_E)$ l'espace propre associé. On montre alors facilement que $F$ est stable par les $f_i$, pour $i$ variant de 1 à $r$ :

$$\forall\, i,\ \forall x \in F,\ f_{r+1}(f_i(x)) = f_i(f_{r+1}(x)) = f_i(\lambda x) = \lambda f_i(x)$$

  En notant $g_i$ la restriction de $f_i$ à $F$, il est possible d'appliquer l'hypothèse de récurrence à la famille $(g_i)_{1 \leq i \leq r}$ ($F$ est de dimension non nulle et les $g_i$ commutent deux à deux) : il existe un vecteur $x \in F$ qui est propre pour tous les $g_i$ : ce vecteur est donc un vecteur propre pour tous les $f_i$ $(0 \leq i \leq r+1)$.

Le résultat demandé est alors une conséquence directe.

**14 -** Soit $(M_1, M_2, \dots, M_r)$ une base de $\mathcal{U}$. D'après le résultat précédent, il existe un vecteur propre $X$ commun aux endomorphismes $\overline{M_1}, \overline{M_2}, \dots, \overline{M_r}$ : si $M \in \mathcal{U}$, avec $M = \alpha_1 M_1 + \cdots + \alpha_r M_r$, on a directement :

$$\overline{M}(X) = \alpha_1 \lambda(M_1) X + \cdots + \alpha_r \lambda(M_r) X = (\alpha_1 \lambda(M_1) + \cdots + \alpha_r \lambda(M_r))\, X$$

et donc $X$ est propre pour tous les endomorphismes associés aux éléments de $\mathcal{U}$.

**Remarque :** il aurait été plus pratique de démontrer directement par récurrence sur $n$ le résultat classique : pour toute famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel complexe de dimension $n \geq 1$ commutant deux à deux, il existe un vecteur propre commun à tous les éléments de la famille.

**15 -** En travaillant matriciellement, les questions 15 et 16 deviennent triviales. Soient $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ des bases de $F$ et$H$, et soit $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$. Les matrices $U$ et $V$ de $u$ et $v$ dans la base $\mathcal{B}$ sont de la forme :

$$U = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ 0 & M_3 \end{pmatrix},\ V = \begin{pmatrix} N_1 & N_2 \\ 0 & N_3 \end{pmatrix}$$

où $M_1$ et $N_1$ sont carrées de taille $\dim(F)$.

On en déduit :

$$\begin{cases} \mathrm{Mat}(p_H u, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ 0 & M_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_3 \end{pmatrix} \\ \\ \mathrm{Mat}(p_H u p_H, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_3 \end{pmatrix} \end{cases}$$

donc $p_H u = p_H u p_H$ (et de même $p_H v = p_H v p_H$).

**16 -** Comme $u$ et $v$ commutent, $U$ et $V$ commutent, i.e.

$$\begin{pmatrix} M_1 N_1 & M_1 N_2 + M_2 N_3 \\ 0 & M_3 N_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_1 M_1 & N_1 M_2 + N_2 M_3 \\ 0 & N_3 M_3 \end{pmatrix}$$

On en déduit que les matrices $M_3$ et $N_3$ commutent, et donc que $p_H u p_H$ et $p_H v p_H$ commutent, ainsi que $p_H u_H$ et $p_H v_H$ (puisque $M_3$ et $N_3$ sont les matrices de $p_H u_H$ et $p_H v_H$ dans la base $\mathcal{B}_2$.

**17 -** L'énoncé doit être compris sous la forme "démontrer le sens direct du théorème dans le cas $p = 1$". Il y a également une maladresse importante : les notions d'algèbres de Lie et de résolubilité sont définies uniquement matriciellement, et il serait pénible de revenir par récurrence à des algèbres de matrices (en restreignant les endomorphismes $\overline{M}$ à un sous-espace stable $H$, on obtient des endomorphismes et pas des matrices : le retour à des matrices nécessite de fixer une base de $H$). Nous parlerons donc ici d'algèbres de Lie en un sens à peine plus général : une algèbre de Lie sur un espace vectoriel (complexe) $E$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ stable par crochet de Lie ($[f, g] = f \circ g - g \circ f$).

Considérons donc la proposition :

$(\mathcal{H}_n)$ : si $\mathcal{U}$ est une algèbre de Lie sur un espace vectoriel complexe $E$ de dimension $n$ et si $\mathcal{U}$ est résoluble de longueur 1 (ce qui revient à dire que les éléments de $\mathcal{U}$ commutent deux à deux), les éléments de $\mathcal{U}$ sont simultanément trigonalisables.

- La propriété $\mathcal{H}_1$ est clairement vérifiée, puisque toute matrice de taille 1 est triangulaire.

- Soit $n \geq 2$ et supposons que $\mathcal{H}_{n-1}$ est vérifiée. Considérons alors une algèbre de Lie résoluble de longueur 1 d'un espace vectoriel complexe $E$ de dimension $n$. D'après la question 14, il existe un vecteur propre $e_1$ commun à tous les éléments de $\mathcal{U}$. Notons $F$ la droite engendrée par $e_1$ ($F$ est stable par tous les éléments de $\mathcal{U}$) et choisissons un hyperplan $H$ supplémentaire de $F$. Notons alors $\mathcal{U}'$ l'ensemble des $p_H u_H$ pour $u \in \mathcal{U}$. D'après la question 16, les éléments de $\mathcal{U}'$ commutent deux à deux : on en déduit que $\mathcal{U}'$ est une algèbre de Lie résoluble de longueur 1 de l'espace $H$. Par hypothèse de récurrence, il existe un base $\mathcal{B}_2 = (e_2, \ldots, e_n)$ de $H$ telle que la matrice de $p_H u_H$ dans $\mathcal{B}_2$ soit triangulaire supérieure pour tout $u \in \mathcal{U}$. La famille $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est alors une base de $E$ qui trigonalise simultanément tous les éléments de $\mathcal{U}$.

Le sens direct du théorème est donc ainsi démontré quand $p = 1$.

**18 -** Comme $\mathcal{U}_1$ est une algèbre de Lie résoluble de longueur $p-1$, il existe une base qui trigonalise (supérieurement) tous les éléments de $\mathcal{U}_1$ : le premier vecteur de cette base est donc un vecteur propre commun à tous les endomorphismes $\overline{M}$ pour $M \in \mathcal{U}_1$.

**19 -** Notons $\mathcal{G}$ l'ensemble générateur de $E$. Par définition, $\mathcal{G}$ est stable par tous les éléments de $\overline{\mathcal{U}}$, donc $E$ l'est également.

D'autre part, le théorème 1 permet d'affirmer que si $A \in \mathcal{U}$, $AX$ est soit nul, soit un vecteur propre commun à tous les éléments de $\overline{\mathcal{U}_1}$. Par récurrence sur $k$, on en déduit que les éléments non nuls de $\mathcal{G}$ sont des vecteurs propres communs à tous les éléments de $\overline{\mathcal{U}_1}$. Par linéarité, cette propriété s'étend à $E$ : les éléments non nuls de $E$ sont tous vecteurs propres communs à tous les éléments de $\overline{\mathcal{U}_1}$.

**20 -** Notons $f$ l'endomorphisme $\overline{[M, M']}_E$. Comme $[M, M'] \in \mathcal{U}_1$, pour tout $y \in E \setminus \{0\}$, il existe $\lambda(y) \in \mathbb{C}$ tel que $f(y) = \lambda(y)\, y$. Si $y_1$ et $y_2$ sont deux vecteurs indépendants de $E$, alors :

$$\lambda(y_1 + y_2)y_1 + \lambda(y_1 + y_2)y_2 = \lambda(y_1 + y_2)\,(y_1 + y_2) = f(y_1 + y_2) = f(y_1) + f(y_2) = \lambda(y_1)y_1 + \lambda(y_2)y_2$$

et donc $\lambda(y_1) = \lambda(y_1 + y_2) = \lambda(y_2)$.

Si maintenant $y_1$ et $y_2$ sont deux vecteurs non nuls liés de $E$, on peut écrire $y_2 = \alpha y_1$ (avec $\alpha$ non nul) et

$$\lambda(y_2)\alpha\, y_1 = \lambda(y_2)\, y_2 = f(y_2) = \alpha\, f(y_1) = \alpha\lambda(y_1)\, y_1$$

et donc $\lambda(y_1) = \lambda(y_2)$. En notant $\lambda$ la valeur commune $\lambda(y)$, $f$ est l'homothétie de rapport $\lambda$.

Enfin, comme $E$ est stable par $\overline{M}$ et $\overline{M'}$, on peut écrire :

$$\mathrm{Tr}(f) = \mathrm{Tr}(\overline{M}_E \circ \overline{M'}_E - \overline{M'}_E \circ \overline{M}_E) = 0.$$

**21 -** Comme la trace de $f$ est égale à $\lambda \dim(E)$ et que $E$ est de dimension non nulle, $\lambda = 0$ : ceci prouve que les éléments de $\mathcal{U}' = \{\overline{M}_E,\ M \in \mathcal{U}\}$ commutent deux à deux. Comme cette famille est clairement une algèbre de Lie de $\mathcal{L}(E)$, c'est une algèbre de Lie résoluble de longueur 1 de $E$. D'après la question 17, il existe donc une base de $E$ qui trigonalise tous les endomorphismes $\overline{M}_E$ pour $U \in \mathcal{U}$.