

Quelques propriétés des racines de P'_n .

1. Par le théorème de Rolle P'_n admet au moins une racine dans $]k, k+1[$ (pour k entre 0 et $n-1$). Comme P'_n est de degré n , il en admet exactement une qui est d'ailleurs simple. \square
2. On a clairement $P_n(X) = X^{n+1} - \frac{n(n+1)}{2}X^n + \dots$ de sorte que $P'_n(X) = (n+1)X^n - \frac{n^2(n+1)}{2}X^{n-1} + \dots$
Donc $\sum_{k=0}^{n-1} x_{n,k} = \frac{n^2}{2}$ et $\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{n,k} = \sum_{k=0}^{n-1} x_{n,k} - \sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{n}{2}$. \square
3. On a $P_n(n-X) = (-1)^{n+1}P_n(X)$ donc $P'_n(n-X) = (-1)^n P'_n(X)$ et en particulier $P'_n(n-x_{n,k}) = 0$.
Or $n-x_{n,k} \in]n-k-1, n-k[$ de sorte que $n-x_{n,k} = x_{n,n-k-1}$ d'après la question 1.
Ainsi $x_{n,k}$ et $x_{n,n-k-1}$ sont symétriques par rapport à $n/2$. \square
4. $\alpha_{n,k} + \alpha_{n,n-1-k} = x_{n,k} - k + x_{n,n-k-1} - (n-k-1) = 1$.
Donc $\alpha_{n,k}$ et $\alpha_{n,n-k-1}$ sont symétriques par rapport à $1/2$. \square
6. Comme les racines de P'_n sont toutes simples, P'_n change de signe à chaque franchissement d'un $x_{n,k}$.
Si n est impair, P'_n est négatif sur $] -\infty, x_{n,0}[$ et si n est pair il est positif. Comme $P_n(0) = 0$ et que $0 < x_{n,0}$ on a $P_n(x_{n,0})$ du signe de $(-1)^n$.
Puis le sens de variation de P_n change sur $]x_{n,0}, x_{n,1}[$. Or $x_{n,0} < 1 < x_{n,1}$ et $P_n(1) = 0$ donc $P_n(x_{n,1})$ est du signe contraire à $P_n(x_{n,0})$ soit du signe de $(-1)^{n-1}$.
Par itération claire, $(-1)^{n-k}P_n(x_{n,k}) > 0$ pour $k = 0, 1, \dots, n-1$. \square
7. De $P_n(X) = (X-n)P_{n-1}(X)$ on tire $P'_n(X) = P_{n-1}(X) + (X-n)P'_{n-1}(X)$ donc en particulier :
 $P'_n(x_{n-1,k}) = P_{n-1}(x_{n-1,k})$ d'où, en vertu de la question 6, $(-1)^{n-k}P'_n(x_{n-1,k}) < 0$ pour $0 \leq k \leq n-2$. \square
8. Convenons de noter $x_{n,-1} = -\infty$ et $x_{n,n} = +\infty$.
On a $x_{n,k-1} < k < x_{n,k} < k+1 < x_{n,k+1}$ et $k < x_{n-1,k} < k+1$ pour $0 \leq k \leq n-2$.
Donc $x_{n-1,k} \in]x_{n,k-1}, x_{n,k}[$ ou $x_{n-1,k} \in [x_{n,k}, x_{n,k+1}[$.
Or compte tenu de la démonstration de la question 6, on a $(-1)^{n-k}P'_n(x) < 0$ sur $]x_{n,k}, x_{n,k+1}[$.
La question 7 prouve alors que $x_{n-1,k} > x_{n,k}$ pour $k = 0, 1, \dots, n-2$. \square
9. De $P_n(X) = X P_{n-1}(X-1)$ on tire $P'_n(X) = P_{n-1}(X-1) + X P'_{n-1}(X-1)$ donc $P'_n(1+x_{n-1,k-1}) = P_{n-1}(x_{n-1,k-1})$.
Il résulte alors de la question 6 que $(-1)^{n-k}P'_n(1+x_{n-1,k-1}) > 0$ pour $k = 1, 2, \dots, n-1$. \square
- 10 Un raisonnement analogue à celui de la question 8 prouve alors que $1 + x_{n-1,k-1} < x_{n,k}$. \square
- 11 D'après la question 8, on a $\alpha_{n,k} < \alpha_{n-1,k}$.
D'après la question 10, on a $\alpha_{n-1,k-1} < \alpha_{n,k}$ et donc (par décalage d'indice) $\alpha_{n-1,k} < \alpha_{n,k+1}$.
Ainsi $\alpha_{n,k} < \alpha_{n,k+1}$. \square

Un développement asymptotique.

- 12 $\mathcal{E} =]0, +\infty[$ (classique question de cours). \square
- 13 Pour $x \in \mathcal{E}$ la fonction h_x est positive sur $]0, +\infty[$, continue et strictement positive en 1 par exemple. \square
- 14 Par la formule de Leibniz Γ est de classe \mathcal{C}^2 sur $]0, +\infty[$ et deux fois dérivable sous le signe intégral (classique question de cours). \square
- 15 Par intégration par parties sur $[\varepsilon, A]$ suivie d'un passage à la limite : $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. \square
- 16 On a $\Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} \ln t e^{-t} t^{x-1} dt = (\ln t \sqrt{e^{-t} t^{x-1}} | \sqrt{e^{-t} t^{x-1}})$ dans l'espace préhilbertien réel $\mathcal{L}^2]0, +\infty[$
(ces deux fonctions sont bien de carré intégrable). L'inégalité de Cauchy-Schwarz fournit alors :
 $\Gamma'(x)^2 \leq \int_0^{+\infty} \ln^2 t e^{-t} t^{x-1} dt \times \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt = \Gamma''(x)\Gamma(x)$.
En outre l'inégalité est stricte puisque les deux fonctions intervenant dans le produit scalaire ci-dessus ne sont pas proportionnelles. Ainsi la fonction ψ est strictement croissante. \square
- 17 Immédiate conséquence de la question 15. \square
- 18 $\phi(n+1) - \phi(n) = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{2n^2}$ d'où la conclusion. \square
- 19 Il en découle que la suite $(\phi(n))$ converge dans \mathbb{R} puisque la série télescopique associée converge. \square

20 Soit $x > 0$ et $n = [x]$. D'après la question 16, il vient $\psi(n) \leq \psi(x) < \psi(n+1)$ et $-\ln(n+1) < -\ln x \leq -\ln n$ donc $\psi(n) - \ln(n+1) < \phi(x) < \psi(n+1) - \ln n$ i.e. $\phi(n) - \ln(1 + \frac{1}{n}) < \psi(x) < \phi(n+1) + \ln(1 + \frac{1}{n})$.

Lorsque $x \rightarrow +\infty$, $n = [x]$ en fait de même, donc, par le principe des gendarmes $\lim_{x \rightarrow +\infty} \phi(x)$ existe et vaut C . \square

21 Si $C \neq 0$ on a $\phi(t) \sim C$. Le théorème d'intégration de la relation d'équivalence dans le cas d'intégrales divergentes pour des fonctions de signe fixe au voisinage de $+\infty$, montre qu'alors $\int_1^x \phi(t) dt \sim Cx$. \square

22 Il vient $\int_1^x \phi(t) dt = \int_1^x \frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t)} - \ln t dt = \ln \Gamma(x) - x \ln x + x - 1$ (car Γ est strictement positive et $\Gamma(1) = 1$).

En particulier pour $x = n \in \mathbb{N}^*$ il vient $\int_1^n \phi(t) dt = \ln((n-1)!) - n \ln n + n - 1 = \ln \frac{(n-1)! \cdot e^n}{e \cdot n^n} = \ln \frac{n! \cdot e^n}{e \cdot n^{n+1}}$.

D'après la formule de Stirling, $\frac{n! \cdot e^n}{e \cdot n^{n+1}} \sim \frac{\sqrt{2\pi}}{e\sqrt{n}}$.

Comme les logarithmes de deux infiniment petits équivalents sont équivalents, il vient $\int_1^n \phi(t) dt \sim -\frac{1}{2} \ln n$.

Ce qui prouve que $C = 0$ sinon on aurait $\int_1^n \phi(t) dt \sim Cn$ d'après la question précédente. \square

23 D'après la question 17, on a $\psi(x+m+1) = \sum_{j=0}^m \frac{1}{x+j} + \psi(x)$.

Par ailleurs $\psi(x+m+1) = \phi(x+m+1) + \ln(x+m+1) = \ln m + \phi(x+m+1) + \ln \frac{m+x+1}{m}$.

Or, pour x fixé, lorsque $m \rightarrow +\infty$, $\phi(x+m+1) + \ln \frac{m+x+1}{m} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0$ (question précédente).

Ainsi, pour tout réel $x > 0$, $\psi(x) = \ln m - \sum_{j=0}^m \frac{1}{x+j} + \varepsilon_m$ avec $\lim_{m \rightarrow +\infty} \varepsilon_m = 0$. \square

Comportement asymptotique des $\alpha_{n,k}$.

24 $\frac{P'_n(X)}{P_n(X)} = \sum_{i=0}^n \frac{1}{X-i}$ et $P'_n(x_{n,k}) = P'_n(k + \alpha_{n,k}) = 0$ pour tout entier k entre 0 et n . Donc :

$$0 = \sum_{i=0}^n \frac{1}{\alpha_{n,k} + k - i} = \sum_{i=0}^k \frac{1}{\alpha_{n,k} + k - i} + \sum_{i=k+1}^n \frac{1}{\alpha_{n,k} + k - i} = \sum_{j=0}^k \frac{1}{\alpha_{n,k} + j} + \sum_{j=0}^{n-k-1} \frac{1}{\alpha_{n,k} - 1 - j} \quad \square$$

25 Notons $k = [nt]$.

Comme $t \in]0, 1[$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} k = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n - k - 1) = +\infty$ (car $n - k - 1 = [(1-t)n - 1]$).

La question 23 fournit alors en particulier :

$$\psi(\alpha_{n,k}) = \ln k + \sum_{j=0}^k \frac{1}{\alpha_{n,k} + j} + \varepsilon_n \quad \text{et} \quad \psi(1 - \alpha_{n,k}) = \ln(n - k - 1) + \sum_{j=0}^{n-k-1} \frac{1}{(1 - \alpha_{n,k}) + j} + \varepsilon_n.$$

Compte-tenu de la question précédente, il vient donc $\psi(u_n) - \psi(1 - u_n) = \ln \frac{k}{n - k - 1} + \varepsilon_n$.

Or $k = [tn] \sim tn$ et $n - k - 1 = [(1-t)n - 1] \sim (1-t)n$ donc $\frac{k}{n - k - 1} \sim \frac{t}{1-t}$ et $\ln \frac{k}{n - k - 1} = \ln \frac{t}{1-t} + \varepsilon_n$.

En conclusion $\psi(u_n) - \psi(1 - u_n) + \ln \frac{1-t}{t} = \varepsilon_n$. \square

26 La formule (A) (dite des compléments) fournit par dérivation logarithmique : $\psi(x) - \psi(1-x) = -\pi \cotan(\pi x)$ pour tout $x \in]0, 1[$. En particulier pour $x = u_n$ on obtient, compte tenu du résultat précédent :

$$\pi \cotan(\pi u_n) = \ln \frac{1-t}{t} + \varepsilon_n \quad \text{donc} \quad u_n = \frac{1}{\pi} \operatorname{Arccotan} \left(\frac{1}{\pi} \left(\ln \frac{1-t}{t} + \varepsilon_n \right) \right)$$

Par continuité de la fonction Arccotan, il vient : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{\pi} \operatorname{Arccotan} \left(\frac{1}{\pi} \ln \frac{1-t}{t} \right)$. \square

FIN