

Concours Mines-Ponts 2006

Corrigé de l'épreuve de Mathématiques 1

rédigé par Stéphane Legros (stephane.legros@free.fr)

I. Calculs préliminaires

1,2) Comme x et T sont positifs, Tx l'est également. On peut ensuite écrire, pour $\theta \geq 0$:

$$\theta \in \Gamma_x \iff \forall i \in \{1, \dots, n\}, \theta x_i \leq (Tx)_i$$

Pour un i tel que $x_i = 0$, θx_i est nul et est toujours inférieur à $(Tx)_i$. Nous en déduisons donc :

$$\theta \in \Gamma_x \iff \forall i \in \{1, \dots, n\} \text{ t.q. } x_i \neq 0, \theta \leq \underbrace{\frac{(Tx)_i}{x_i}}_{\geq 0}$$

Comme l'un au moins des x_i est non nul, cela donne $\Gamma_x = \left[0, \min \left\{ \frac{(Tx)_i}{x_i}, 1 \leq i \leq n \text{ et } x_i \neq 0 \right\} \right]$ ce qui prouve que Γ_x est non vide, fermé et borné, et que son plus grand élément est :

$$\theta(x) = \min \left\{ \frac{(Tx)_i}{x_i}, 1 \leq i \leq n \text{ et } x_i \neq 0 \right\}$$

3) Pour $\alpha > 0$ et $x \in B$, nous avons $x_i \neq 0$ si et seulement si $(\alpha x)_i \neq 0$, et pour un tel i , $\frac{(Tx)_i}{x_i} = \frac{(T(\alpha x))_i}{(\alpha x)_i}$. La relation précédente donne donc $\theta(x) = \theta(\alpha x)$.

4) Soit $x \in B$ et choisissons i_0 tel que $x_{i_0} > 0$. Nous avons alors $(Px)_i = \sum_{j=1}^n \underbrace{p_{i,j} x_j}_{\geq 0} \geq p_{i,i_0} x_{i_0} > 0$ pour tout i et donc $Px > 0$: nous avons démontré que $P(B) \subset B^+$.

5) Soit $\theta \in \Gamma_x$. Comme P est positive, $\theta x \leq Tx$ donne $P(\theta x) \leq PTx$, i.e. $\theta Px \leq T(Px)$ puisque P et T commutent (P est un polynôme en T). On en déduit que $\Gamma_x \subset \Gamma_{Px}$, puis que $\theta(x) \leq \theta(Px)$.

Notons $y = Px$. Nous savons (question 4) que y est strictement positif. Si l'on avait $(Ty)_i = 0$, la i -ème ligne de T serait nulle (car T est positive). Les matrices T^j , pour $j \geq 1$, auraient alors également leur i -ème ligne nulle et $P = I_n + \sum_{j=1}^{n-1} \binom{n-1}{j} T^j$ ne serait pas strictement positive. On en déduit que Ty est strictement positif, puis que $\theta(Px) > 0$ d'après la question 2).

6) Si $Tx = \lambda x$, alors $\lambda = \theta(x) > 0$ et $Px = (1 + \lambda)^{n-1} x$. On en déduit que $\theta(Px) = \theta(x)$ d'après la question 3).

7) Notons $\lambda = \theta(x)$ et supposons que x ne soit pas un vecteur propre pour T associé à λ . Le vecteur $y = Tx - \lambda x$ est alors élément de B . D'après la question 4), $P y$ est élément de B^+ , ce qui donne $\lambda(Px) < PTx = T(Px)$. Ainsi, pour tout i , nous avons (en remarquant que $Px > 0$), $\lambda < \frac{(T(Px))_i}{(Px)_i}$ et en particulier :

$$\theta(x) = \lambda < \min_{1 \leq i \leq n} \frac{(T(Px))_i}{(Px)_i} = \theta(Px)$$

Nous avons donc démontré par contraposée la propriété demandée.

- 8) Pour tout i , l'application $x \mapsto (Tx)_i/x_i$ est continue sur B^+ (c'est le quotient de deux formes linéaires). On en déduit que l'application $\varphi : x \mapsto \min_{1 \leq i \leq n} \frac{(Tx)_i}{x_i}$ est continue sur B^+ : comme $P(C) \subset P(B) \subset B^+$, la restriction de φ à $P(C)$ est donc continue, i.e. que θ est continue sur $P(C)$.
- 9) $C = \Sigma \cap B = \Sigma \cap \{x \in \mathbb{R}^n, x \geq 0\}$ est un fermé borné de \mathbb{R}^n (intersection d'un fermé borné et d'un fermé) : il est donc compact. L'application $x \mapsto Px$ étant continue, $P(C)$ est une partie compacte. L'application θ restreinte à ce compact non vide étant continue, elle est bornée et atteint ses bornes : il existe en particulier x_0 dans $P(C)$ tel que $\theta(x_0) = \sup_{x \in P(C)} \theta(x)$.
- 10) Si $x \in C$, $Px \in P(C)$ et $\theta(x) \leq \theta(Px) \leq \sup_{y \in P(C)} \theta(y)$. Ceci prouve l'inégalité demandée.
- 11) Si $x \in B$, $y = x/\|x\|_1$ est élément de C et $\theta(x) = \theta(y)$ d'après 3). Ceci prouve que $\sup_{x \in B} \theta(x) \leq \sup_{x \in C} \theta(x)$. L'inégalité inverse est évidente, puisque $C \subset B$.
- 12) Comme $P(C) \subset B^+ \subset B$, nous avons directement $\sup_{x \in C} \theta(x) \leq \sup_{x \in P(C)} \theta(x) \leq \sup_{x \in B} \theta(x) = \sup_{x \in C} \theta(x)$, soit :
- $$\sup_{x \in C} \theta(x) = \sup_{x \in P(C)} \theta(x) = \theta(x_0).$$
- 13) Comme x_0 est élément de $P(C)$, il est élément de B^+ et est donc strictement positif. Il existe $y_0 \in B$ tel que $x_0 = Py_0$; la question 5) donne alors $\theta_0 = \theta(Py_0) > 0$. Enfin, $\theta(x_0) \leq \theta(Px_0) \leq \sup_{x \in B} \theta(x) = \theta(x_0)$, donc $\theta(x_0) = \theta(Px_0)$ et, d'après la question 7), x_0 est un vecteur propre pour T associé à la valeur propre θ_0 .

II. Une méthode d'approximation

- 14) Pour tout i compris entre 1 et n , nous avons $\theta x_i = \sum_{j=1}^n t_{i,j} x_j$, et donc $|\theta| |x_i| \leq \sum_{j=1}^n t_{i,j} |x_j|$, ce qui donne $|\theta| x^+ \leq Tx^+$.
- 15) Comme $x^+ \in B$, $|\theta| \leq \theta(x^+) \leq \sup_{y \in B} \theta(y) = \theta_0$.
- 16) $|\theta| \|x^+\|_1 = \|\theta x\|_1 = \|Tx\|_1 = \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n t_{i,j} x_j \right| \leq \sum_{1 \leq i,j \leq n} t_{i,j} |x_j| = \sum_{j=1}^n \left(\underbrace{\sum_{i=1}^n t_{i,j}}_{=1} \right) |x_j| = \|x\|_1 = \|x^+\|_1$.
- 17) Le vecteur $x = (1, 1, \dots, 1)$ est un vecteur propre pour tT , associé à la valeur propre 1. On en déduit que 1 est également valeur propre de T (T et tT ont même polynôme caractéristique). La question 15) donne donc $1 \leq \theta_0$.

D'autre part, la question 13) prouve que θ_0 est une valeur propre de T : on a donc $\theta_0 \leq 1$ d'après la question 16).

18) Tout d'abord, les matrices T^j et R_j sont clairement positive. Ensuite, pour $M \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ la condition :

$$\forall j \in \{1, \dots, n\}, \quad \sum_{1 \leq i \leq n} m_{i,j} = 1$$

signifie que le vecteur $e = (1, \dots, 1)$ est un vecteur propre pour tM associé à la valeur propre 1. Comme ${}^tTe = e$, on obtient ensuite facilement, par récurrence sur j , que ${}^tT^j e = e$, puis que ${}^tR_j e = e$. Ceci achève de prouver que les matrices T^j et R_j sont stochastiques.

19) Si M est une matrice stochastique, le calcul fait à la question 16) montre que $\|Mx\|_1 \leq \|x\|_1$ pour tout vecteur x . On en déduit que $\|M\|_1 \leq 1$, et en particulier $\|T^k\|_1 \leq 1$ et $\|R_k\|_1 \leq 1$ pour tout $k \geq 1$.

20) Pour $k \geq 1$, $TR_k - R_k = \frac{1}{k}(T^k - I_n)$, donc $\|TR_k - R_k\|_1 \leq \frac{1}{k}(\|T^k\|_1 + \|I_n\|_1) \leq \frac{2}{k}$ (car $\|I_n\|_1 = 1$).

21) Pour $x \in \mathbb{C}^n$, nous avons $\|R_k x\|_1 \leq \|R_k\|_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_1$ pour tout $k \geq 0$. La suite $(R_k x)_{k \geq 0}$ est donc une suite bornée de l'espace vectoriel normé $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_1)$. Comme cet espace est de dimension finie, le théorème de Bolzano-Weierstrass assure l'existence d'une valeur d'adhérence.

22) Il existe donc une application $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^*$ strictement croissante telle que $R_{\sigma(k)} x \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} y$. On en déduit que $TR_{\sigma(k)} x - R_{\sigma(k)} x$ tend vers $Ty - y$ quand k tend vers l'infini.

D'autre part, $\|TR_{\sigma(k)} x - R_{\sigma(k)} x\|_1 \leq \|TR_{\sigma(k)} - R_{\sigma(k)}\|_1 \|x\|_1 \leq \frac{2}{\sigma(k)} \|x\|_1 \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$, donc $Ty = y$, puis

$T^j y = y$ pour tout $j \geq 0$, et enfin $R_k y = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} T^j y = y$ pour tout $k \geq 1$.

23) Soient $m, l \geq 1$. Comme R_l et R_m commutent (ce sont deux polynômes en T), nous avons directement :

$$R_l(R_m x - z) - R_m(R_l x - y) = R_l R_m x - R_l z - R_l R_m x + R_m y = y - z$$

24) Supposons comme à la question précédente que y et z sont deux valeurs d'adhérence de la suite $(R_k x)$. Il existe alors $\sigma, \sigma' : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^*$ strictement croissantes telles que $R_{\sigma(k)} x \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} y$ et $R_{\sigma'(k)} x \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} z$. Nous avons alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \|y - z\|_1 &= \left\| R_{\sigma(k)}(R_{\sigma'(k)} x - z) - R_{\sigma'(k)}(R_{\sigma(k)} x - y) \right\|_1 \\ &\leq \underbrace{\|R_{\sigma(k)}\|_1}_{\leq 1} \|R_{\sigma'(k)} x - z\|_1 + \underbrace{\|R_{\sigma'(k)}\|_1}_{\leq 1} \|(R_{\sigma(k)} x - y)\|_1 \\ &\leq \|R_{\sigma'(k)} x - z\|_1 + \|R_{\sigma(k)} x - y\|_1 \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0 \end{aligned}$$

Ceci prouve que $y = z$: la suite $(R_k x)$ possède donc une et une seule valeur d'adhérence.

25) On en déduit que pour tout x , la suite $(R_k x)$ est convergente (une suite d'un compact qui ne possède qu'une valeur d'adhérence est convergente). Notons donc f l'application :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^n & \longrightarrow & \mathbb{C}^n \\ x & \longmapsto & \lim_{+\infty} R_k x \end{array}$$

f est clairement linéaire, puisque si $x, y \in \mathbb{C}^n$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, on a $R_k(\lambda x + \mu y) = \lambda R_k(x) + \mu R_k(y)$ pour tout k , ce qui donne $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$ quand k tend vers l'infini. En en déduit qu'il existe une matrice R telle que $\forall x \in \mathbb{C}^n, Rx = f(x) = \lim_{k \rightarrow +\infty} R_k x$.

En choisissant pour x le i -ème vecteur de la base canonique de \mathbb{C}^n , nous en déduisons que la i -ème colonne de R_k converge vers la i -ème colonne de R . Ceci prouve que la suite (R_k) converge vers R "terme à terme", i.e. pour $\|\cdot\|_\infty$. Les normes étant équivalentes en dimension finie, on en déduit que R_k tend également vers R au sens de la norme $\|\cdot\|_1$ quand k tend vers l'infini.

Remarque : on peut évidemment se passer de l'équivalence des normes en remarquant que $\|\cdot\|_1 \leq n \|\cdot\|_\infty$.

26) T commute avec chaque R_k , donc, par continuité du produit matriciel, T commute avec $R = \lim_{k \rightarrow +\infty} R_k$.

27) En faisant tendre k vers l'infini dans l'inégalité de la question 20), nous obtenons $\|TR - R\|_1 = 0$, soit $R = TR = RT$. On en déduit que $RT^j = R$ pour tout $j \in \mathbb{N}$, puis :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, RR_k = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} RT^j = R$$

ce qui donne enfin $R^2 = R$ en faisant tendre k vers l'infini.

28) R est une projection : elle est donc caractérisée par ses espaces propres $\text{Ker}(R)$ et $\text{Ker}(R - I_n) = \text{Im}(R)$.

Comme $(T - I_n)R = 0$, on a $\text{Im}(R) \subset \text{Ker}(T - I_n)$. D'autre part, si $x \in \text{Ker}(T - I_n)$, $R_k(x) = x$ pour tout $k \geq 1$ et donc $R(x) = x$: ceci prouve que $x \in \text{Im}(R)$, ce qui donne $\text{Im}(R) = \text{Ker}(T - I_n)$.

Enfin, $R(T - I_n) = 0$ donne $\text{Im}(T - I_n) \subset \text{Ker}(R)$. Par la formule du rang, nous avons :

$$\dim(\text{Ker}(R)) = n - \dim(\text{Im}(R)) = n - \dim(\text{Ker}(T - I_n)) = \dim(\text{Im}(T - I_n))$$

et donc $\text{Ker}(R) = \text{Im}(T - I_n)$.

Ceci prouve que R est la projection sur l'espace propre $\text{Ker}(T - I_n)$ parallèlement à l'espace $\text{Im}(T - I_n)$ (ces deux sous-espaces étant en particulier supplémentaires).

29) Comme $\text{Ker}(T - I_n)$ est de dimension 1, il est engendré par le vecteur x_0 . D'autre part, T étant stochastique, les vecteurs colonnes de la matrice $T - I_n$ sont contenus dans l'hyperplan d'équation $x_1 + \dots + x_n = 0$. Comme $\text{Im}(T - I_n)$ est un hyperplan, on en déduit que c'est exactement l'ensemble des vecteurs x vérifiant $x_1 + \dots + x_n = 0$. Un élément x de B s'écrit alors d'une unique façon sous la forme :

$$x = \lambda x_0 + y$$

avec $y_1 + \dots + y_n = 0$. On en déduit que $\sum_{i=1}^n x_i = \lambda \sum_{i=1}^n (x_0)_i + \sum_{i=1}^n y_i = \lambda \sum_{i=1}^n (x_0)_i$. Comme les deux vecteurs

x_0 et x sont élément de B , cela donne $\lambda = \frac{\|x\|_1}{\|x_0\|_1}$. Nous avons ainsi calculé le projeté de x sur $\text{Im}(R)$ parallèlement à $\text{Ker}(R)$:

$$\forall x \in B, R(x) = \|x\|_1 \frac{x_0}{\|x_0\|_1}.$$

Ceci achève de démontrer le théorème de Perron-Frobenius : si y est élément de $\Sigma \cap B$, $\|y\|_1 = 1$ et l'égalité précédente s'écrit :

$$\frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} T^j(y) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \frac{x_0}{\|x_0\|_1}$$

ce qui permet d'approximer le vecteur propre strictement positif unitaire associé à la valeur propre 1.