A 2004 Math MP 1

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES.
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE.
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Filière TSI).

CONCOURS D'ADMISSION 2004

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
Filière MP
(Durée de l'épreuve : 3 heures)
(**L'usage d'ordinateur ou de calculette est interdit).**

Sujet mis à la disposition des concours :
Cycle International, ENSTIM, ENSAE (Statistique), INT, TPE-EIVP.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :
MATHÉMATIQUES 1-Filière MP.

Cet énoncé comporte 4 pages de texte.
Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'objet de ce problème est principalement l'étude et le calcul de l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^\infty \frac{\arctan t}{e^{\pi\ t} - 1}\ dt\ .$$

Première partie

Le but de cette partie est d'établir une expression de l'intégrale I et d'étudier la fonction φ définie par la relation suivante :

$$\varphi(t) = \frac{\arctan t}{e^{\pi\ t} - 1}\ .$$

Variations de la fonction φ :

1. Déterminer un éventuel prolongement par continuité de la fonction φ en 0.

2. Étudier les variations de la fonction φ sur la demi-droite ouverte $D =]0, \infty[$; il peut être intéressant d'introduire la fonction auxiliaire ψ définie par la relation suivante :

$$\psi(t) = \frac{1 - e^{-\pi\ t}}{1 + t^2} - \pi\ \arctan t\ .$$

En déduire la borne supérieure de la fonction φ sur D.

Existence et expressions de l'intégrale I :
3. Justifier l'existence de l'intégrale I définie par la relation suivante :

$$I = \int_0^\infty \frac{\arctan t}{e^{\pi\ t} - 1}\ dt\ .$$

4. Démontrer les deux relations suivantes :

$$I = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^\infty e^{-k\ \pi\ t}\ \ \arctan t\ dt \quad ; \quad I = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\ \pi} \int_0^\infty \frac{e^{-k\ \pi\ t}}{1+t^2}\ dt \quad .$$

Deuxième partie

Le but de cette partie est d'introduire une fonction f de façon à transformer les expressions obtenues précédemment pour l'intégrale I et à pouvoir calculer l'intégrale I. Soit f la fonction définie par la relation suivante :

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-x\ t}}{1+t^2}\ dt \quad .$$

Propriétés de la fonction f :
5. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f. Préciser l'ensemble dans lequel la fonction f est continue ; quelle est sa limite lorsque le réel x tend vers l'infini ?

6. Dans quel ensemble est-elle deux fois continûment dérivable ? Établir une relation simple entre la fonction f et sa dérivée seconde f''sur la demi-droite ouverte $D =]0, \infty[$.

Deux intégrales :
Soit a un réel strictement positif ($a > 0$). Étant donné un réel X supérieur ou égal à a ($X \geq a$), soient $S(X)$ et $C(X)$ les deux intégrales suivantes :

$$S(X) = \int_a^X \frac{\sin t}{t} dt \quad ; \quad C(X) = \int_a^X \frac{\cos t}{t} dt\ .$$

7. Existe-t-il une limite à chacune des expressions $S(X)$ et $C(X)$, lorsque le réel X croît vers l'infini ?

Soient g et h les deux fonctions définies sur la demi-droite ouverte D par les relations suivantes :

$$g(x) = \int_x^\infty \frac{\sin t}{t} dt = \lim_{X \longrightarrow \infty} \int_x^X \frac{\sin t}{t} dt \quad ; \quad h(x) = \int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt = \lim_{X \longrightarrow \infty} \int_x^X \frac{\cos t}{t} dt\ .$$

Une expression de la fonction f :

8. Résoudre l'équation différentielle vérifiée par la fonction f dans la demi-droite ouverte $D =]0, \infty[$; exprimer la solution générale de cette équation à l'aide des deux fonctions g et h.

9. En déduire les deux expressions ci-dessous de la fonction f :

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{\sin u}{u + x}\, du = \int_0^\infty \frac{\sin(xt)}{1+t}\, dt \quad .$$

Troisième partie

Un résultat intermédiaire :

10. En utilisant les résultats établis dans les première et deuxième parties, démontrer la relation suivante :

$$I = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\ \pi} \int_0^\infty \frac{\sin(k\ u)}{\pi + u}\, du\ .$$

11. Démontrer le résultat suivant :

$$I = \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{(u+\pi)^2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nu)}{n^2} \right) du.$$

Somme de la série de terme général $\cos(nu)/n^2$, $n \in \mathbb{N}^*$ **:**

Soit G la fonction, définie sur la droite réelle, périodique de période 2π ($G(x + 2\pi) = G(x)$), dont la restriction au segment $[0, 2\pi]$ est définie par la relation suivante :

$$G(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{\pi x}{2} + \frac{\pi^2}{6}.$$

12. Étudier la parité de la fonction G. Déterminer le développement en série de Fourier, à coefficients réels, de cette fonction G.

Quelle est la nature de la convergence de la série de Fourier ?

13. En déduire la somme $T(x)$ de la série de terme général $\cos(nx)/n^2$, $n \in \mathbb{N}^*$, lorsque le réel x appartient au segment $[0, 2\pi]$:

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}.$$

En déduire la somme S de la série de terme général $1/n^2$, $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Valeur de l'intégrale I :

Soit a_k le réel défini par l'intégrale suivante :

$$a_k = \int_{2\ k\ \pi}^{2\ (k+1)\ \pi} \frac{1}{(u+\pi)^2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nu)}{n^2} \right) \ du.$$

14. Calculer, pour tout entier naturel k, la valeur du réel a_k.

Soit N un entier strictement positif. Soit I_N le réel défini par la relation ci-dessous :

$$I_N = \sum_{n=0}^{N-1} \left(-1 + (n+1) \ln \frac{2n+3}{2n+1} \right).$$

15. Démontrer que la valeur de l'intégrale I est égale à la limite de la suite $(I_N)_{N \in \mathbb{N}^*}$:

$$I = \lim_{N \longrightarrow \infty} I_N \ .$$

En déduire que l'intégrale I est la somme d'une série convergente.

16. Après avoir montré que l'expression $E_N = \exp(I_N)$ est égale à un produit de facteurs, déterminer la valeur de l'intégrale I.

Soit J l'intégrale suivante :

$$J = \int_0^{\infty} \frac{\arctan t}{e^{2\ \pi\ t} - 1} \ dt \ .$$

Il est facile de calculer l'intégrale J par la même méthode que celle qui a servi pour calculer l'intégrale I ; il vient :

$$J = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\ln(2\pi)}{2} \right).$$

Soit K l'intégrale suivante :

$$K = \int_0^{\infty} \frac{\arctan t}{e^{\pi\ t} + 1} \ dt \ .$$

Calcul de l'intégrale K :

17. Calculer l'intégrale K, définie ci-dessus, en utilisant le résultat obtenu pour l'intégrale I et la valeur admise pour l'intégrale J.

FIN DU PROBLÈME