## Première partie

**1°)** On utilise le théorème spectral : $M$ , symétrique réelle, admet une base $\mathcal{B}$ *orthonormée* de vecteurs propres . En écrivant $(x)_i$ les composantes d'un vecteur quelconque $x \in \mathbb{R}^n$ dans cette base, on a que l'expression du produit scalaire est l'expression canonique, et d'autre part, que $M.x$ s'écrit simplement en fonction des valeurs propres $(\lambda_i)$ correspondantes de $M$ : $(M.x)_i = \lambda_i.(x)_i$ . On en déduit : $\big(Mx \mid x\big) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.(x)_i^2$ . D'où, en appelant $p$ (respectivement $q$ ) la plus petite (respectivement la plus grande) des valeurs propres de $M$ , on a l'inégalité :

$$p.\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} p.(x)_i^2 \leqslant \big(Mx \mid x\big) \leqslant \sum_{i=1}^{n} q.(x)_i^2 = q.\|x\|^2 \quad .$$

Remarquons que ces inégalités sont les meilleures possibles, puisqu'elles deviennent des égalités lorsque $x$ est un vecteur propre associé à la plus petite (respectivement la plus grande) des valeurs propres .

**2°)** La condition suffisante découle de l'inégalité ci-dessus : si $p > 0$ , on a $\forall\, x \in \mathbb{R}^n \quad \big(Mx \mid x\big) \geqslant p.\|x\|^2 \geqslant 0$ ; d'autre part, 0 n'est alors pas valeur propre , donc $M.x = 0 \Rightarrow x = 0$ , et $M$ est injective, donc inversible.
Mais la condition est aussi nécessaire, car l'inégalité $\big(Mx \mid x\big) \geqslant 0$ doit être en particulier vraie pour les vecteurs propres (non nuls) de $M$ , d'où, pour toute valeur propre $\lambda_i$ de $M$ , $\lambda_i.\|x\|^2 \geqslant 0$ , soit $\lambda_i \geqslant 0$ ; de plus, l'inversibilité de $M$ interdit la valeur propre 0 , donc les valeurs propres $\lambda_i$ de $M$ sont bien $> 0$ .

**3°)** En se plaçant toujours dans une base orthonormée propre pour $M$ , on a, pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ :

$$\|M.x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (Mx)_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2.x_i^2 \leqslant \Big(\operatorname*{Max}_{1\leqslant i\leqslant n} \lambda_i^2\Big).\sum_{i=1}^{n} (x)_i^2 = \Big(\operatorname*{Max}_{1\leqslant i\leqslant n} \lambda_i^2\Big).\|x\|^2 \quad .$$

En prenant la racine carrée des deux membres de l'inégalité ci-dessus, et en utilisant $\sqrt{\Big(\operatorname*{Max}_{1\leqslant i\leqslant n} \lambda_i^2\Big)} = \operatorname*{Max}_{1\leqslant i\leqslant n} |\lambda_i|$ , on en déduit : $\forall\, x \in \mathbb{R}^n \quad \|M.x\| \leqslant \operatorname*{Max}_{1\leqslant i\leqslant n} |\lambda_i|.\|x\|$ , d'où déjà l'implication :

$$(1) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n \quad \|x\| = 1 \Rightarrow \|M.x\| \leqslant \operatorname*{Max}_{1\leqslant i\leqslant n} |\lambda_i| \quad ;$$

Mais la première inégalité ci-dessus devient une égalité si $x$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_{i_0}$ telle que $|\lambda_{i_0}| = \operatorname*{Max}_{1\leqslant i\leqslant n} |\lambda_i|$ . Comme un vecteur propre, non nul, peut toujours être normalisé, on voit que dans l'implication (1) on peut obtenir l'égalité à droite. Donc le nombre $\operatorname*{Max}_{1\leqslant i\leqslant n} |\lambda_i|$ est le plus petit des majorants possibles, soit par définition, $N(M) = \operatorname*{Max}_{1\leqslant i\leqslant n} |\lambda_i|$ .

**4°)** On suppose ici, comme indiqué dans le préambule de cette partie de l'énoncé, que $A$ est inversible, donc (cf **2.**) que les valeurs propres de $A$ sont *strictement* positives.
La formule de récurrence s'écrit $x^{k+1} = S.x^k + \alpha.b$ où on a posé $S = Id - \alpha.A$ . $S$ est encore une matrice symétrique, dont les valeurs propres sont les $1 - \alpha.\lambda_i$ , $\lambda_1$ , ... , $\lambda_n$ étant les valeurs propres (distinctes ou non) de $A$ . Vu la condition imposée à $\alpha$ , les valeurs propres de $S$ sont dans $]-1, 1[$ , et en particulier $N(S) < 1$ . L'unique point $z$ vérifiant $A.z = b$ vérifie aussi $z = S.z + \alpha.b$ , donc la suite de vecteurs $y^k = z - x^k$ vérifie la relation de récurrence $y^{k+1} = S.y^k$ , soit $y^k = S^k.y^0$ . Par propriété de la norme $N$ , $\|S.y\| \leqslant N(S).\|y\|$ , on a donc $\|y^k\| \leqslant \big(N(S)\big)^k.\|y^0\|$ . De $N(S) \in ]0, 1[$ on conclut alors que $y^k \to 0$ , soit $x^k \to z$ .

**5°)** Par bilinéarité et symétrie du produit scalaire, on trouve :

$$f(x + u) - f(x) = \big(Ax \mid u\big) - \big(b \mid u\big) + \frac{1}{2}\big(Au \mid u\big) = \big(Ax - b \mid u\big) + \frac{1}{2}\big(Au \mid u\big) \quad .$$

**6°)** Par définition, une dérivée partielle s'obtient en cherchant la limite de $\frac{1}{t}\big(f(x + te_k) - f(x)\big)$ lorsque $t \to 0$ . Par le calcul précédent, on a

$$\frac{1}{t}\big(f(x + te_k) - f(x)\big) = \big(Ax - b \mid e_k\big) + \frac{t}{2}\big(Ae_k \mid e_k\big) \quad ,$$

et il en résulte clairement l'existence de la dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}$ , égale à $\big(Ax - b \mid e_k\big)$ .

**7°)** On sait qu'en base orthonormée les composantes d'un vecteurs s'expriment par les produits scalaires avec les vecteurs de base, donc, vu la définition de $g$ et le calcul ci-dessus, on a $g(x) = A.x - b$ .

**8°)** Cela a été vu en **1.** : par **5.**, $I(x,u) = \frac{1}{2}\big(Au \mid u\big)$ où la matrice $\frac{1}{2}A$ est symétrique définie positive, donc l'encadrement $r\|u\|^2 \leqslant I(x,u) \leqslant s\|x\|^2$ a lieu pour $r,s$ respectivement égaux à l'inf et au sup des valeurs propres de $\frac{1}{2}A$ .

**9°)** Condition nécessaire : un minimum absolu sur $\mathbb{R}^n$ est a fortiori un minimum local et par théorème ($\mathbb{R}^n$ est un ouvert !), c'est nécessairement un point critique.
Condition suffisante : si $g(x) = 0$ , on a pour tout $u \in \mathbb{R}^n$ , puisque $I(x,u) \geqslant 0$ , $f(x+u) = f(x) + I(x,u) \geqslant f(x)$ , donc $f(x)$ est un minimum absolu.

**10°)** En appliquant le calcul du **5.** au vecteur $u = -\alpha.g(x) = -\alpha(Ax - b)$ , on obtient (par **1.** et dfinition de $\lambda_n$ ) :

$$f\big(x - \alpha g(x)\big) - f(x) = -\alpha\big(g(x) \mid g(x)\big) + \frac{\alpha^2}{2}\big(Ag(x) \mid g(x)\big) \leqslant \Big(-\alpha + \frac{\alpha^2}{2}\lambda_n\Big).\|g(x)\|^2 \quad .$$

L'hypothèse $0 < \alpha < \frac{2}{\lambda_n}$ entraîne $-\alpha + \frac{\alpha^2}{2}\lambda_n < 0$ , donc $f\big(x - \alpha g(x)\big) - f(x) \leqslant 0$ (l'ingalit est mme stricte sauf si $g(x) = 0$ ).

**11°)** L'algorithme consiste à prendre un $y^0 \in \mathbb{R}^n$ quelconque (par exemple $y^0 = 0$ ) puis de définir $(y^k)$ par la relation $y^{k+1} = y^k - \alpha.g(y^k)$ , $\alpha$ choisi comme précédemment. On obtient ainsi une suite $(y^k)$ telle que $f(y^k)$ soit strictement décroissante. On remarque que cette suite est en fait exactement celle définie au **4.**, puisque $g(x) = Ax - b$ . Elle converge donc vers $z = A^{-1}b$ , qui vérifie $g(z) = 0$ . Par **9.**, $f$ admet bien un minimum en $z = \lim y^k$ dans ce cas.

## Deuxième partie

**12°)** Par **1.** on a une inégalité de la forme : $\forall\, x \in \mathbb{R}^n \quad r.\|x\|^2 \leqslant \frac{1}{2}\big(Ax \mid x\big)$ , $r = \frac{1}{2}\underset{\lambda \in sp(A)}{\mathrm{Min}}$ $\lambda$ étant strictement positif. De plus, par Cauchy-Schwarz, $\big(b \mid x\big) \leqslant \|b\|.\|x\|$ . D'où finalement :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n \quad f(x) \geqslant \|x\|.\big(r.\|x\| - \|b\|\big) \quad .$$

Comme la fonction au membre de droite $z \mapsto h(z) = z(rz - \|b\|)$ tend vers $+\infty$ quand $z = \|x\| \to \infty$ , la propriété demandée est clairement vérifiée.

**13°)** C'est la propriété précédente, appliquée à $c = f(y)$ , et restreinte aux vecteurs $x$ de $F$ .

**14°)** Un sous-espace vectoriel étant non vide, soit $y \in F$ fixé. Par ci-dessus, $r$ étant choisi tel que $\|x\| \geqslant r \Rightarrow f(x) \geqslant f(y)$ , le minimum de $f_{|F}$ est à chercher dans $K = F \bigcap \bar{B}(0,r)$ . Or, en dimension finie, un sous-espace vectoriel est un fermé, ainsi qu'une boule fermée, et de même pour leur intersection. Donc $K$ , fermé et borné d'un espace vectoriel de dimension finie, est compact. $f$ est une application continue (car polynômiale en les composantes), donc elle admet un minimum $\bar{x}$ atteint sur $K$ , cqfd.

**15°)** Admettons $f$ convexe, et supposons l'existence de 2 minimums $\bar{x} \neq \bar{y}$ à $f_{|F}$ . Déjà, par double inégalité, $f(\bar{x}) = f(\bar{y})$ . Puis, pour $\lambda = 1/2$ , par exemple, on a :

$$f\Big(\frac{1}{2}\bar{x} + \frac{1}{2}\bar{y}\Big) < \frac{1}{2}f(\bar{x}) + \frac{1}{2}f(\bar{y}) = f(\bar{x}) \quad ,$$

ce qui, puisque $\frac{1}{2}\bar{x} + \frac{1}{2}\bar{y}$ reste dans $F$ , contredit que $\bar{x}$ est un minimum pur $f_{|F}$ . Donc le minimum, qui existe par **14.**, est unique.

*Remarque : $f$ est la somme d'une fonction quadratique $x \mapsto \frac{1}{2}\big(Ax \mid x\big)$ et d'une fonction linéaire $x \mapsto -\big(b \mid x\big)$ . Une fonction linéaire étant évidemment convexe (au sens large), la stricte convexité de $f$ résulte de celle de $x \mapsto \big(Ax \mid x\big)$ . Or celle-ci découle simplement de la définie positivité de la matrice symétrique $A$ . On a en effet, pour tout $\lambda \in ]0,1[$ et pour tout $x,y$ de $\mathbb{R}^n$ tels que $x \neq y$ :*

$$\big(A((1-\lambda)x + \lambda y) \mid (1-\lambda)x + \lambda y\big) \overset{?}{<} (1-\lambda)\big(Ax \mid x\big) + \lambda\big(Ay \mid y\big)$$

$$\Longleftrightarrow \lambda(1-\lambda)\big(Ax \mid x\big) - 2\lambda(1-\lambda)\big(Ax \mid y\big) + \lambda(1-\lambda)\big(Ay \mid y\big) \overset{?}{>} 0$$

$$\Longleftrightarrow \lambda(1-\lambda)\big(A(x-y) \mid x-y\big) \overset{?}{>} 0 \quad ,$$

*et cette dernière inégalité est acquise par hypothèse sur $\lambda$ et définie- positivité de $A$ .*

**16°)** $g$ , calculé à la question **7.**, est le gradient de $f$ , et on sait que, pour tout vecteur $u$ , $\dfrac{\partial f}{\partial u}(y) = df_y(u) = \big(g(y) \mid u\big)$ .
Or, $\dfrac{\partial f}{\partial u}(y)$ représente la dérivée en $t = 0$ de la fonction $\varphi : t \mapsto f(y + t.u)$ , donc si $y \in F$ est un minimum pour $f_{|F}$ , et si $u \in F$ , $\varphi$ admet un minimum absolu en 0 . Il en résulte bien $0 = \varphi'(0) = \big(g(y) \mid u\big) = \big(Ay - b \mid u\big)$ .
Réciproquement, si $Ay - b$ est orthogonal à $F$ , on a comme à la question **9.** que $\forall\, u \in F \;\; f(y+u) - f(y) = I(y,u) = \frac{1}{2}\big(Au \mid u\big) \geqslant 0$ , et $f(y)$ est bien un minimum de $f_{|F}$ .

**17°)** On a donc $\big(A\bar{x} - b \mid \bar{x}\big) = 0$ , soit $\big(A\bar{x} \mid \bar{x}\big) = \big(b \mid \bar{x}\big)$ . De l'expression de $f$ on déduit alors

$$f(\bar{x}) = -\frac{1}{2}\big(A\bar{x} \mid \bar{x}\big) = -\frac{1}{2}\big(b \mid \bar{x}\big) \quad .$$

**18°)** Petite diffuculté non signalée ici : les *inf* et *sup* sont à prendre dans $\bar{R}$ : par exemple, si $Bx \neq 0$ , comme la fonction $y \mapsto L(x,y)$ est linéaire, elle est non bornée car non identiquement nulle !
L'inégalité demandée est une propriété générale des fonctions de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dans $\bar{R}$ . En effet, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ , en utilisant que le sup (respectivement l'inf) est un majorant (respectivement un minorant), on a :

$$\operatorname*{Inf}_{x \in \mathbb{R}^n} f(x,y) \leqslant f(x,y) \leqslant \operatorname*{Sup}_{y \in \mathbb{R}^n} f(x,y) \quad ,$$

inégalité qu'on peut noter $m(y) \leqslant M(x)$ . A $x$ fixé, $M(x)$ est un majorant des $m(y)$ , donc, puisque le sup est le plus petit des majorants, $\operatorname*{Sup}_{y \in \mathbb{R}^n} m(y) \leqslant M(x)$ ; puis, par le même raisonnement, quand $x$ varie dans $\mathbb{R}^n$ , l'inf étant le plus grand des majorants, $\operatorname*{Sup}_{y \in \mathbb{R}^n} m(y) \leqslant \operatorname*{Inf}_{x \in \mathbb{R}^n} M(x)$ , ce qui est l'inégalité demandée.

**19°)** En un point selle $(x^*, y^*)$ on a les inégalités

$$\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \quad L(x^*, y) \overset{(1)}{\leqslant} L(x^*, y^*) \overset{(2)}{\leqslant} L(x, y^*) \quad .$$

L'inégalité (1) donne, puisque le sup est plus petit qu'un majorant, $\operatorname*{Sup}_{y \in \mathbb{R}^n} L(x^*, y) \leqslant L(x^*, y^*)$ . Puis, comme l'inf minore une instance particulière, $\operatorname*{Inf}_{x \in \mathbb{R}^n} \operatorname*{Sup}_{y \in \mathbb{R}^n} L(x,y) \leqslant L(x^*, y^*)$ . De même, l'inégalité (2) donne $L(x^*, y^*) \leqslant \operatorname*{Inf}_{x \in \mathbb{R}^n} L(x, y^*)$ . puis $L(x^*, y^*) \leqslant \operatorname*{Sup}_{y \in \mathbb{R}^n} \operatorname*{Inf}_{x \in \mathbb{R}^n} L(x,y)$ . A cause de l'inégalité «inverse» démontrée en **18.**, les inégalités ci-dessus sont des égalités, cqfd.

**20°)** • On cherche une proposition équivalente à la proposition

$$\forall\, y \in \mathbb{R}^n \quad L(x_1, y) - L(x_1, y_1) = \big(y - y_1 \mid Bx_1\big) \leqslant 0 \quad .$$

Si $Bx_1 = 0$ , l'inégalité est vraie car c'est une égalité, si $Bx_1 \neq 0$ , l'inégalité est fausse pour $y = y_1 + Bx_1$ , donc la CNS est bien $Bx_1 = 0$ .
• Par propriété du produit scalaire canonique, on a

$$\big(y_1 \mid Bx\big) = {}^t y_1.Bx = {}^t\big({}^t y_1.Bx\big) = {}^t x\, {}^t B y_1 = \big({}^t B y_1 \mid x\big) \quad ,$$

On voit donc qu' $y_1$ fix $L(x, y_1) = \frac{1}{2}\big(Ax \mid x\big) - \big(b \mid x\big) + \big({}^t B y_1 \mid x\big)$ est une fonction $f$ o on a remplac $b$ par $b - {}^t B y_1$ . La question **9.** dit alors que $x \mapsto L(x, y_1)$ admet un minimum en $x_1$ si et seulement si $Ax_1 = b - {}^t B y_1$ , soit $Ax_1 + {}^t B y_1 = b$ , ce qui est bien la proprit demande.

**21°)** La définition du point selle donne par les équivalences ci-dessus où on a remplacé $(x_1, y_1)$ par $(x^*, y^*)$ :

$$(x^*, y^*) \text{ point selle } \Rightarrow Bx^* = 0 \;\, et \;\, Ax^* + {}^t B y^* = b \quad .$$

Mais de plus, quand $Bx = 0$ , i.e. quand $x \in F$ , $L(x,y)$ se réduit à $f(x)$ . Donc, l'inégalité de définition $\forall\, x \in \mathbb{R}^n \;\; L(x^*, y^*) \leqslant L(x, y^*)$ implique bien que $f(x^*)$ est un minimum de $f_{|F}$ .
Réciproquement, si $x_1 \in F$ réalise un minimum pour $f_{|F}$ , on a $Bx_1 = 0$ , et si de plus $Ax_1 + {}^t B y_1 = b$ la question **20.** assure que $(x_1, y_1)$ est un point selle par définition du point selle.

**22°)** • A $y = y^m$ fixé, l'application $x \mapsto L(x, y^m) = \frac{1}{2}\big(Ax \mid x\big) - \big(b - {}^tBy^m \mid x\big)$ est du même type que la fonction $f$ dans les questions **14.** et **15.**, elle admet donc un minimum et un seul. Ainsi $x^m$ est bien défini, ainsi que $y^{m+1} = y^m + \rho_m.Bx^m$ .
• Par **20.** on a $Ax^m + {}^tBy^m = b$ , par **21.**, $Ax^* + tBy^* = b$ , donc par différence, $A(x^m - x^*) + {}^tB(y^m - y^*) = 0$ .
• Toujours par **21.**, on sait que $x^* \in F$ , donc $Bx^* = 0$ . Ainsi la relation $y^{m+1} - y^* = y^m - y^* + \rho_m.B(x^m - x^*)$ découle-t-elle de la relation de définition de $y^{m+1}$ .

**23°)** Par bilinéarité du produit scalaire, la dernière relation ci-dessus implique

$$\|y^{m+1} - y^*\|^2 = \|y^m - y^*\|^2 + \rho_m^2.\|B(x^m - x^*)\|^2 + 2\rho_m.\big(y^m - y \mid B(x^m - x)\big) \quad .$$

Mais par **22.**

$$\big(y^m - y \mid B(x^m - x)\big) = \big({}^tB(y^m - y) \mid x^m - x\big) = -\big(A(x^m - x^*) \mid x^m - x^*\big) \quad ,$$

et donc finalement

$$\|y^{m+1} - y^*\|^2 = \|y^m - y^*\|^2 + \rho_m^2.\|B(x^m - x^*)\|^2 - 2\rho_m.\big(A(x^m - x^*) \mid x^m - x^*\big) \quad .$$

**24°)** Classique ; les valeurs propres $\lambda_i$ de $A$ sont $> 0$ , donc admettent des racines carrées réelles. En écrivant une diagonalisation de $A$ sous la forme $A = P.diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n).{}^tP$ , $P$ matrice carrée orthogonale, on voit que la matrice $A^{1/2} = P.diag(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}).{}^tP$ convient : elle est bien symétrique réelle, à valeurs propres positives donc positive, et $\big(A^{1/2}\big)^2 = A$ .
Notons qu'en fait, puisque les $\lambda_i$ sont strictement positives, $A$ est définie positive, donc $A^{-1/2}$ existe bien.

**25°)** L'inverse d'une matrice symétrique inversible est symétrique, donc $A^{-1/2}$ est symétrique. Il en résulte par la règle de transposition d'un produit, ${}^tC = {}^tA^{-1/2}.{}^tB.B.{}^tA^{-1/2} = C$ : $C$ est symétrique.
Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ , $\big(Cx \mid x\big) = \big(A^{-1/2}.{}^tB.B.A^{-1/2}.x \mid x\big) = \big(B.A^{-1/2}.x \mid B.A^{-1/2}.x\big) = \|B.A^{-1/2}.x\|^2 \geqslant 0$ , donc $C$ est positive.
Pour tout $u \in \mathbb{R}^n$ , posons $x = A^{1/2}.u \Leftrightarrow u = A^{-1/2}x$ . Par le calcul ci-dessus et par **1.**,

$$\|Bu\|^2 = \big(Cx \mid x\big) \leqslant \Big(\operatorname*{Sup}_{\mu \in sp(C)} \mu\Big).\big(x \mid x\big) = \nu.\big(A^{1/2}u \mid A^{1/2}u\big) = \nu.\big(Au \mid u\big) \quad ,$$

où on a posé $\nu = \operatorname*{Sup}_{\mu \in sp(C)} \mu$ .

**26°)** L'égalité de **23.** donne alors, puisque $\rho_m \geqslant 0$ :

$$\|y^{m+1} - y^*\|^2 - \|y^m - y^*\|^2 = \rho_m\Big(\rho_m\|Bu^m\|^2 - 2\big(Au^m \mid u^m\big)\Big) \leqslant \rho_m(\rho_m\nu - 2)\big(Au^m \mid u^m\big) \quad .$$

Par les hypothèses sur $\rho_m$ , $\rho_m\nu - 2 < 0$ , et comme $A$ est positive, on a $\|y^{m+1} - y^*\|^2 - \|y^m - y^*\|^2 \leqslant 0$ : la suite $\|y^m - y^*\|$ est décroissante.

**27°)** La suite positive décroissante $\|y^m - y^*\|^2$ est donc convergente, ce qui implique que $\|y^{m+1} - y^*\|^2 - \|y^m - y^*\|^2 \to 0$ . Compte tenu des hypothèses sur $\rho_m$ , l'inégalité ci-dessus donne

$$\|y^{m+1} - y^*\|^2 - \|y^m - y^*\|^2 \leqslant \alpha(\beta\nu - 2)\big(Au^m \mid u^m\big) \leqslant 0 \quad , \quad \text{avec } \alpha(\beta\nu - 2) \neq 0 \quad ,$$

d'où par théorème d'encadrement des limites, $\big(Au^m \mid u^m\big) \to 0$ . Mais alors, de l'encadrement, donné par **1.**, $0 \leqslant \|u^m\|^2 \leqslant \frac{1}{\rho}\big(Au^m \mid u^m\big)$ , on déduit que $\|u^m\| \to 0$ , soit que $x^m \to x^*$ .

⁂