MINES-PONTS 2002. Filière MP. MATHÉMATIQUES 1.

Corrigé de JL. Lamard (jean-louis.lamard@prepas.org)

I.1. Fonction E.

a. Pour tout réel x, il vient $E(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^{kx}}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(kx)^n}{k!\ n!} \Big)$. Cette égalité est vraie en particulier pour $|x|$ ce qui prouve que la famille $\Big(\frac{(kx)^n}{k!\ n!} \Big)_{(k,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ est sommable et le théorème de Fubini permet d'écrire :
$E(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{k!} \Big) \frac{x^n}{n!}$. CQFD.

b. L'unicité du développement en série entière qui est celui de Mac-laurin fournit $A_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{k!}$. CQFD.

c. Il vient $A_{n+1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \Big(\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{k!} \mathrm{C}_n^p\, k^p \Big)$. La famille $\Big(\frac{1}{k!} \mathrm{C}_n^p\, k^p \Big)_{(k,p)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}_n}$ étant positive, elle est donc sommable et là encore Fubini fournit $A_{n+1} = \sum_{p=0}^{n} \mathrm{C}_n^p \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^p}{k!}$ i.e. $A_{n+1} = \sum_{p=0}^{n} \mathrm{C}_n^p\, A_p$.
Ainsi la suite (A_n) vérifie la même relation de récurrence que la suite (B_n) avec $A_0 = A_1 = e$. Une itération immédiate prouve alors que $A_n = eB_n$. CQFD.

I.2. Comparaison de sommes infinies.

a. Comme $u_k > 0$ pour tout k, $R_{p,n} \neq 0$ et $\frac{U_n}{R_{p,n}} = 1 + \alpha(p,n)$ avec $\alpha(p,n) = \frac{\sum_{k=1}^{p-1} u_k k^n}{\sum_{k=p}^{+\infty} u_k k^n}$.
Or $0 \leqslant \sum_{k=1}^{p-1} u_k k^n \leqslant \widetilde{u}_p (p-1)^n$ avec $\widetilde{u}_p = \max\{u_1, u_2, \ldots, u_{p-1}\}$ et
$\sum_{k=p}^{+\infty} u_k k^n \geqslant u_p p^n$ donc $0 \leqslant \alpha(p,n) \leqslant \frac{\widetilde{u}_p}{u_p} \Big(\frac{p-1}{p} \Big)^n$ donc, pour $p \geqslant 1$ fixé quelconque, $\lim_{n\to+\infty} \alpha(p,n) = 0$.
Ainsi $U_n \sim R_{p,n}$ pour $p \geqslant 1$ fixé quelconque lorsque n tend vers $+\infty$. CQFD.

b. Soit $\varepsilon \in]0,1[$ fixé quelconque. Il existe p_0 tel que $(1-\varepsilon)u_k \leqslant v_k \leqslant (1+\varepsilon)u_k$ pour $k \geqslant p_0$.
Il en découle, avec des notations claires, $(1-\varepsilon)R_{p_0,n}(u) \leqslant R_{p_0,n}(v) \leqslant (1+\varepsilon)R_{p_0,n}(u)$.
Or $U_n \sim R_{p_0,n}(u)$ d'après la question précédente.
Donc il existe n_0 tel que $(1-\varepsilon)U_n \leqslant R_{p_0,n}(u) \leqslant (1+\varepsilon)U_n$ pour $n \geqslant n_0$.
Il en découle $(1-\varepsilon)^2 U_n \leqslant R_{p_0,n}(v) \leqslant (1+\varepsilon)^2 U_n$ pour $n \geqslant n_0$.
Ainsi $U_n \sim R_{p_0,n}(v)$. Or $R_{p_0,n}(v) \sim V_n$ d'après la question précédente. Donc $U_n \sim V_n$. CQFD.

I.3. Fonction f_n.

a. $x^2 f_n(x) = \exp\big(-x\ln x + x + (n+3/2)\ln x \big) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ donc $f_n(k) = o(\frac{1}{k^2})$ et ainsi $\sum_{k=0}^{+\infty} f_n(k)$ converge. CQFD.

b. D'après la formule de Stirling, $\frac{1}{k!} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-k\ln k + k - 1/2 \ln k)$ donc d'après la question I.2.b. :
$A_n \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{+\infty} k^n \exp(-k\ln k + k - 1/2\ln k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{+\infty} f_n(k)$. CQFD.

II.1. Étude de la fonction ϕ_λ.

a. Au voisinage de 0, $\phi_\lambda(x) \sim \lambda \ln x$ et, au voisinage de $+\infty$, $\phi_\lambda(x) \sim -x\ln x$.

b. $\phi'_\lambda(x) = \frac{\lambda}{x} - \ln x$ et $\phi''_\lambda(x) = -\frac{\lambda + x}{x^2}$ donc ϕ'_λ décroît sur $]0,+\infty[$ de $+\infty$ à $-\infty$ et partant s'annule en un unique réel μ racine de l'équation $x\ln x - \lambda = 0$.
Ainsi ϕ_λ croît sur $]0,\mu[$ de $-\infty$ à $\phi_\lambda(\mu)$ puis décroît sur $]\mu,+\infty[$ vers $-\infty$. CQFD.

c. Dans la suite on note $h(x) = x\ln x$. La fonction h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1,+\infty[$ et $h'(x) = 1 + \ln x > 0$. Donc h réalise un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme croissant de $]1,+\infty[$ sur $]0,+\infty[$.
Ainsi $\varphi = h^{-1}$ est-elle bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$. CQFD.

II.2. Maximum de la fonction f_n.

a. Pour $x > 0$ on a $f_n(x) = \exp\Big(\phi_{n-1/2}(x)\Big)$ de sorte que, sur $]0,+\infty[$, f_n admet un maximum en un unique point $\mu_n = \varphi(n-1/2)$, maximum strictement positif. C'est également le maximum de f_n sur $\mathbb{R}$ puisque f_n est nulle sur $]-\infty,0]$.
Ainsi f_n admet un unique maximum sur $\mathbb{R}$ atteint en le réel $\mu_n = \varphi(n-1/2)$. CQFD.

f_n est clairement continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$. Par ailleurs $\lim\limits_{x\to 0^-} f_n'(x) = 0$. Donc, d'après le théorème de prolongement des applications $\mathcal{C}^1$, f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\lim\limits_{x\to 0^+} f_n'(x) = 0$.

Pour $x > 0$ il vient $f_n'(x) = \phi_\lambda'(x)\exp\big(\phi_\lambda(x)\big)$ avec $\lambda = n - 1/2$. Or au voisinage de 0^+, $\phi_\lambda'(x) = \dfrac{\lambda}{x} - \ln x \sim \dfrac{\lambda}{x}$ et $\phi_\lambda(x) = \lambda \ln x + o(1)$ donc $\exp\big(\phi_\lambda(x)\big) \sim \exp(\lambda \ln x) = x^\lambda$ donc $f_n'(x) \sim \lambda x^{\lambda-1}$ tend vers 0 si et seulement si $\lambda - 1 = n - 3/2 > 0$ soit si et seulement si $n \geqslant 2$.
Ainsi f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $n \geqslant 2$. CQFD.

b. On a vu que $\mu_n = \varphi(n-1/2)$ c'est à dire que μ_n est caractérisé par $h(\mu_n) = n - 1/2$ avec $h(x) = x\ln x$ strictement croissante sur $]1, +\infty[$.
Ainsi $h(\mu_1) = 1/2$ et $h(\mu_2) = 3/2$. Or $h(1) = 0$ et $h(2) = 2\ln 2 \in]1/2, 3/2[$ donc $1 < \mu_1 < 2 < \mu_2$. CQFD.

- De même pour établir que $\sqrt{n} < \mu_n < n$ pour $n \geqslant 3$, il suffit de prouver que $\dfrac{1}{2}\sqrt{n}\ln n < n - \dfrac{1}{2} < n \ln n$ (1).

  Soit $\Delta(x) = x - \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\sqrt{x}\ln x$. Il vient que $\Delta'(x)$ est du signe de $4\sqrt{x} - \ln x - 2$ dont le minimum est atteint en $1/4$ et vaut $\ln 4 > 0$ par une étude immédiate. Donc Δ croît et comme $\Delta(1) = 1/2 > 0$ il vient que l'inégalité de gauche de (1) est vraie pour tout $n \geqslant 1$.
  Soit désormais $\delta(x) = x\ln x - x + 1/2$. Comme $\delta'(x) = \ln x$, δ croît sur $[1, +\infty[$. Or $\delta(3) = 3\ln 3 - 5/2 > 0$ car $\ln 3 > 5/6$ puisque $3 > e$. Ce qui établit l'inégalité de droite de (1) pour $n \geqslant 3$. CQFD.

- De $\mu_n \ln \mu_n = n - 1/2$ on tire $\dfrac{\mu_n}{n} = \dfrac{1 - 1/2n}{\ln \mu_n} \sim \dfrac{1}{\ln \mu_n}$ tend vers 0 car $\mu_n \geqslant \sqrt{n}$. Ainsi $\mu_n = o(n)$. CQFD.

- Nous avons $\mu_n \sim \dfrac{n}{\ln \mu_n}$ donc pour n assez grand $\mu_n \geqslant \dfrac{n}{2\ln \mu_n}$. Or $\ln \mu_n \leqslant \ln n$ puisque $\mu_n < n$. Donc $\mu_n \geqslant \dfrac{n}{2\ln n}$ pour n assez grand donc $n^\alpha = o(\mu_n)$ pour tout réel $\alpha \in]0, 1[$. CQFD.

III.1. Propriétés de la fonction g_n.

a. Vérification immédiate à partir de la définition de g_n.

b. En II.2.a. est indiquée l'allure du graphe de f_n. Il en découle celui de g_n : fonction continue sur $\mathbb{R}$, nulle sur $]-\infty, \sqrt{n}]$, croissante sur $[\sqrt{n}, 0]$ puis décroissante vers 0 sur $]0, +\infty[$. La maximum atteint en 0 a pour valeur 1.

c. D'après la relation admise en II.1. dans l'énoncé avec $\lambda = n - 1/2$ et compte tenu de $f_n(x) = \exp\big(\phi_{n-1/2}(x)\big)$ pour $x > 0$, il vient que :
$g_n(x) = \exp\Big(\big(\mu_n - (n-1/2)\big)\big(\dfrac{x}{\sqrt{n}} - \ln(1 + \dfrac{x}{\sqrt{n}})\big) - \mu_n \dfrac{x}{\sqrt{n}} \ln(1 + \dfrac{x}{\sqrt{n}})\Big)$ pour $x > -\sqrt{n}$ et $g_n(x) = 0$ sinon. (2).

Fixons $x \in \mathbb{R}$. Pour n assez grand, $x > -\sqrt{n}$ et donc $g_n(x)$ admet la première expression ci-dessus.
Or $\mu_n = o(n)$ donc $\mu_n - (n - 1/2) \sim -n$ et $\dfrac{x}{\sqrt{n}} - \ln(1 + \dfrac{x}{\sqrt{n}}) \sim -\dfrac{x^2}{2n}$.
Il en découle que $\big(\mu_n - (n-1/2)\big)\big(\dfrac{x}{\sqrt{n}} - \ln(1 + \dfrac{x}{\sqrt{n}})\big)$ tend vers $-\dfrac{x^2}{2}$.
Par ailleurs $\mu_n \dfrac{x}{\sqrt{n}} \ln(1 + \dfrac{x}{\sqrt{n}}) \sim \dfrac{\mu_n}{n} x^2$ tend vers 0 car $\mu_n = o(n)$.

Ainsi la suite (g_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction g définie par $g(x) = \exp(-\dfrac{x^2}{2})$. CQFD.

d. Fixons $x > -\sqrt{n}$. On remarque que, x positif ou négatif, on a toujours $\mu_n \dfrac{x}{\sqrt{n}} \ln(1 + \dfrac{x}{\sqrt{n}}) \geqslant 0$ et partant, d'après (2) ci-dessus, $g_n(x) \leqslant \exp\Big(\big(\mu_n - (n-1/2)\big)\big(\dfrac{x}{\sqrt{n}} - \ln(1 + \dfrac{x}{\sqrt{n}})\big)\Big)$ et cela pour tout entier n et tout réel $x > -\sqrt{n}$.
Or $\mu_n = o(n)$ donc, pour n assez grand, $\mu_n - (n - 1/2) \leqslant -\dfrac{n}{2}$.

Il en découle qu'il existe un entier n_0 tel que pour $n \geqslant n_0$ on ait $g_n(x) \leqslant \exp\Big(-\dfrac{n}{2}\big(\dfrac{x}{\sqrt{n}} - \ln(1 + \dfrac{x}{\sqrt{n}})\big)\Big)$ pour tout réel $x > -\sqrt{n}$. CQFD.

III.2. Une majoration de la fonction g_n.

a. u est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, +\infty[\backslash\{0\}$ et au voisinage de 0, $u(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{3} + O(x^2)$ ce qui prouve que u est dérivable en 0 de nombre dérivé $-\dfrac{1}{3}$.

Il vient que, pour $x \neq 0$, $u'(x) = \dfrac{v(x)}{x^3}$ avec $v(x) = -\dfrac{x^2+2x}{1+x} + 2\ln(1+x)$. Or $v'(x) = -\dfrac{x^2}{(1+x)^2}$ donc v décroît sur $]-1,+\infty[$. Or $v(0) = 0$ donc $v(x) > 0$ pour $x < 0$ et $v(x) > 0$ pour $x > 0$. Il en découle que $u'(x) < 0$ pour tout $x > -1$, $x \neq 0$. (Et également en 0 puisque $u'(0) = -1/3$).

En conclusion u est décroissante et positive car $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = 0$. CQFD.

b. Soit $n \geqslant n_0$ fixé quelconque, n_0 entier introduit précédemment.

Pour tout $x > -\sqrt{n}$ on a $g_n(x) \leqslant \exp\Big(-\dfrac{n}{2}\big(\dfrac{x}{\sqrt{n}} - \ln(1+\dfrac{x}{\sqrt{n}})\big)\Big) = \exp\Big(-\dfrac{x^2}{2}u(\dfrac{x}{\sqrt{n}})\Big)$ d'après la question III.1.d.

- Si $x \in]-\sqrt{n}, 0]$ il vient que $u(\dfrac{x}{\sqrt{n}}) \geqslant u(0) = \dfrac{1}{2}$ puisque u décroît donc $g_n(x) \leqslant \exp(-\dfrac{x^2}{4})$.

  Cette majoration est encore vraie si $x \leqslant -\sqrt{n}$ puisqu'alors $g_n(x) = 0$.

  En conclusion $g_n(x) \leqslant \exp(-\dfrac{x^2}{4})$ pour tout $n \geqslant n_0$ et tout $x \leqslant 0$. CQFD.

- Si $x \geqslant 0$ il vient $u(\dfrac{x}{\sqrt{n}}) \geqslant u(x)$ puisque u décroît. Il en découle $g_n(x) \leqslant \exp\Big(-\dfrac{x^2}{2}u(x)\Big)$.

  En d'autres termes $g_n(x) \leqslant \exp\Big(-\dfrac{1}{2}\big(x - \ln(1+x)\big)\Big) = \sqrt{1+x}\ \exp\big(-\dfrac{x}{2}\big)$ pour tout $n \geqslant n_0$ et tout $x \geqslant 0$. CQFD.

IV.1. Intégrabilité de la fonction g_n.

- Soit $n \geqslant 1$ fixé quelconque. f_n est continue donc localement intégrable sur $\mathbb{R}$. Elle est intégrable en $-\infty$ puisque nulle pour $x \leqslant 0$. En outre $x^2 f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc f_n est intégrable en $+\infty$ et finalement f_n est intégrable sur $\mathbb{R}$.

  Le $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme $x \longrightarrow \mu_n\big(1+\dfrac{x}{\sqrt{n}}\big)$ de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ prouve alors, d'après la définition de g_n donnée au début de la troisième partie, que g_n est intégrable sur $\mathbb{R}$. CQFD.

- Notons ℓ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\ell(x) = \exp(-\dfrac{x^2}{4})$ pour $x \leqslant 0$ et $\ell(x) = \sqrt{1+x}\ \exp\big(-\dfrac{x}{2}\big)$ sinon.

  ℓ est intégrable sur $\mathbb{R}$ car $\ell(x) = o\big(\dfrac{1}{x^2}\big)$ au voisinage de $-\infty$ et de $+\infty$. Par ailleurs ℓ domine la suite (g_n) sur $\mathbb{R}$ d'après la question III.2.b.

  Ainsi la suite (g_n) est une suite de fonctions continues sur $\mathbb{R}$ qui converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction continue g et qui est dominée sur $\mathbb{R}$ par la fonction ℓ intégrable. D'après le théorème de la convergence dominée, la suite $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} g_n(x)\,\mathrm{d}\,x$ converge vers $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} g(x)\,\mathrm{d}\,x = \int_{\mathbb{R}} \exp\big(-\dfrac{x^2}{2}\big) = \sqrt{2\pi}$ (intégrale de Gauss). CQFD.

IV.2. Un encadrement de la somme S_n.

Sur $[0,+\infty[$ la fonction positive f_n croît entre 0 et μ_n puis décroît. Il en découle classiquement que :

$$\int_0^p f_n \leqslant \sum_{k=1}^{p} f_n(k) \leqslant f_n(p) + \int_0^p f_n \quad \text{et} \quad \int_{p+1}^{+\infty} f_n \leqslant \sum_{k=p+1}^{+\infty} f_n(k) \leqslant f_n(p+1) + \int_{p+1}^{+\infty} f_n.$$

Donc par addition, vu que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n = \int_{\mathbb{R}} f_n$, il vient :

$$\int_{\mathbb{R}} f_n - \int_p^{p+1} f_n \leqslant S_n \leqslant f_n(p) + f_n(p+1) + \int_{\mathbb{R}} f_n - \int_p^{p+1} f_n \leqslant f_n(p) + f_n(p+1) + \int_{\mathbb{R}} f_n \qquad (3).$$

Or $f_n(x) = f_n(\mu_n) g_n\Big(\dfrac{\sqrt{n}}{\mu_n}x - \sqrt{n}\Big)$ d'après la question III.1.a. de sorte que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f_n = f_n(\mu_n)\frac{\mu_n}{\sqrt{n}}\int_{\mathbb{R}} g_n$.

Par ailleurs $\displaystyle\int_p^{p+1} f_n \leqslant f_n(\mu_n)$ ainsi que $f_n(p) \leqslant f_n(\mu_n)$ et $f_n(p+1) \leqslant f_n(\mu_n)$ puisque $f_n(\mu_n)$ est le maximum de la fonction f_n.

Il découle alors de (3) que $f_n(\mu_n)\dfrac{\mu_n}{\sqrt{n}}I_n - f_n(\mu_n) \leqslant S_n \leqslant f_n(\mu_n)\dfrac{\mu_n}{\sqrt{n}}I_n + 2f_n(\mu_n) \quad (4)$.

Posons $K_n = f_n(\mu_n)\dfrac{\mu_n}{\sqrt{n}}$ et $\varepsilon_n = 2\dfrac{\sqrt{n}}{\mu_n}$ qui tend bien vers 0 d'après la question II.2.b.iii.

L'inégalité (4) ci-dessus permet alors d'écrire $K_n(I_n - \varepsilon_n) \leqslant S_n \leqslant K_n(I_n + \varepsilon_n)$. CQFD.

IV.3. Un équivalent du réel B_n.

D'après les questions I.1.c. et I.3.b. on a $B_n \sim \dfrac{1}{e}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}S_n$.

Or $S_n \sim \sqrt{2\pi}K_n$ d'après la question précédente et le fait que I_n tend vers $\sqrt{2\pi}$ (question IV.1.).

Ainsi $B_n \sim \dfrac{1}{e}K_n$. CQFD.

FIN