A2001 MATH MP 2

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES,
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ETIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Filière STI)

CONCOURS D'ADMISSION 2001

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
DEUXIÈME ÉPREUVE
Filière MP

Corrigé de M. Quercia (michel.quercia@prepas.org)

Première partie

I-1. Propriétés du module de continuité :

a. Pour $h > 0$, $\omega_\varphi(h)$ est bien défini car φ est bornée. Pour $0 < h \leqslant h'$ on a :

$$\{(x,y) \in I^2 \mid |x-y| \leqslant h\} \subset \{(x,y) \in I^2 \mid |x-y| \leqslant h'\}$$

d'où $\omega_\varphi(h) \leqslant \omega_\varphi(h')$.

b. Soit $h'' = h + h'$ et $x, y \in I$ tels que $|x-y| \leqslant h''$. Par exemple $0 \leqslant x - y \leqslant h''$. On pose $z = \max(y, x-h)$ donc $z \in [y,x] \subset I$ et $0 \leqslant x - z \leqslant h$, $0 \leqslant z - y \leqslant (x-y) - h \leqslant h'$. Alors :

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant |\varphi(x) - \varphi(z)| + |\varphi(z) - \varphi(y)| \leqslant \omega_\varphi(h) + \omega_\varphi(h').$$

En prenant la borne supérieure sur x, y on obtient $\omega_\varphi(h+h') \leqslant \omega_\varphi(h) + \omega_\varphi(h')$.
$\omega_\varphi(nh) \leqslant n\omega_\varphi(h)$ se démontre par récurrence sur n à partir de l'inégalité précédente.
Soit $n = \lceil \lambda \rceil$: $n - 1 < \lambda \leqslant n$ donc $\omega_\varphi(\lambda h) \leqslant \omega_\varphi(nh) \leqslant n\omega_\varphi(h) \leqslant (1+\lambda)\omega_\varphi(h)$.

c. Conséquence immédiate de la définition de l'uniforme continuité.

d. Inégalité des accroissements finis.

I-2. Noyaux de Dirichlet et de Fejer :

a. $K_n(\theta) = \dfrac{n^2}{\lambda_n} F_n^2(\theta)$ donc d'après la formule de Parseval :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\theta=0}^{2\pi} K_n(\theta)\,\mathrm{d}\theta = \frac{n^2}{\lambda_n}\sum_{k=-n+1}^{n-1}\Big(1 - \frac{|k|}{n}\Big)^2 = \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k=-n+1}^{n-1}(n-|k|)^2 = \frac{n(2n^2+1)}{3\lambda_n}.$$

D'où $\lambda_n = \dfrac{n(2n^2+1)}{3} \sim \frac{2}{3}n^3$.

b. $\alpha(t) = \dfrac{(t - \sin t)(t + \sin t)(t^2 + \sin^2 t)}{t^4 \sin^4 t} \sim \dfrac{2}{3t^2}$.
$t \longmapsto t^3\alpha(t)$ est continue sur $]0, \pi/2]$ et admet une limite finie, 0, en 0 donc est prolongeable par continuité à $[0, \pi/2]$. La fonction prolongée est bornée car continue sur un compact.

$I_n = (u = nt) = \displaystyle\int_{u=0}^{n\pi/2} \frac{\sin^4 u}{u^3/n^3}\,\frac{\mathrm{d}u}{n} = n^2\int_{u=0}^{n\pi/2}\frac{\sin^4 u}{u^3}\,\mathrm{d}u \sim n^2\int_{u=0}^{+\infty}\frac{\sin^4 u}{u^3}\,\mathrm{d}u.$

$J_n \leqslant \displaystyle\int_{t=0}^{\pi/2} A_2\frac{\sin^4(nt)}{t^2}\,\mathrm{d}t = (u = nt) = nA_2\int_{u=0}^{n\pi/2}\frac{\sin^4 u}{u^2}\,\mathrm{d}u \leqslant nA_2\int_{u=0}^{+\infty}\frac{\sin^4 u}{u^2}\,\mathrm{d}u.$

c. K_n est une fonction positive donc $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{t=0}^{\pi}(1+nt)K_n(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$ pour tout entier n.

$K_n(2\pi - t) = K_n(t)$ donc $\frac{1}{\pi}\displaystyle\int_{t=0}^{\pi}K_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{t=0}^{2\pi}K_n(t)\,\mathrm{d}t = 1.$

Enfin, $\frac{1}{\pi}\int_{t=0}^{\pi} ntK_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{n}{\pi\lambda_n}\int_{t=0}^{\pi} t\frac{\sin^4(nt/2)}{\sin^4(t/2)}\,\mathrm{d}t = \frac{4n}{\pi\lambda_n}\int_{\theta=0}^{\pi/2}\theta\frac{\sin^4(n\theta)}{\sin^4\theta}\,\mathrm{d}\theta = \frac{4n}{\pi\lambda_n}(I_n+J_n) \sim 6\int_{u=0}^{+\infty}\frac{\sin^4 u}{u^3}\,\mathrm{d}u$ car J_n est négligeable devant I_n quand n tend vers l'infini. La suite de terme général $\frac{1}{\pi}\int_{t=0}^{\pi} ntK_n(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente, donc bornée ce qui prouve l'existence de M_0.

I-3. Polynôme $j_n[g]$:

a. $$\begin{aligned} j_n[g](-\theta) &= \frac{1}{2\pi}\int_{t=-\pi}^{\pi} g(-\theta-t)K_n(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{t=-\pi}^{\pi} g(\theta+t)K_n(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{(parité de } g\text{)} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{u=-\pi}^{\pi} g(\theta-u)K_n(-u)\,\mathrm{d}u \qquad (u=-t) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{u=-\pi}^{\pi} g(\theta-u)K_n(u)\,\mathrm{d}u \qquad \text{(parité de } K_n\text{)} \\ &= j_n[g](\theta). \end{aligned}$$

Soit $K_n(\theta) = \frac{n^2}{\lambda_n}\Big(\sum_{k=-n+1}^{n-1}\Big(1-\frac{|k|}{n}\Big)e^{ik\theta}\Big)^2 = \sum_{k=-2n+2}^{2n-2} c_k e^{ik\theta}$. On a :

$$\begin{aligned} j_n[g](\theta) &= \frac{1}{2\pi}\int_{t=-\pi}^{\pi} g(\theta-t)K_n(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{u=\theta-\pi}^{\theta+\pi} g(u)K_n(\theta-u)\,\mathrm{d}u \qquad (u=\theta-t) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{u=-\pi}^{\pi} g(u)K_n(\theta-u)\,\mathrm{d}u \qquad (2\pi\text{-périodicité de } g \text{ et } K_n) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{u=-\pi}^{\pi} g(u)\Big(\sum_{k=-2n+2}^{2n-2} c_k e^{ik(\theta-u)}\Big)\,\mathrm{d}u \\ &= \sum_{k=-2n+2}^{2n-2} c_k e^{ik\theta}\Big(\frac{1}{2\pi}\int_{u=-\pi}^{\pi} g(u)e^{-iku}\,\mathrm{d}u\Big), \end{aligned}$$

donc $j_n[g]$ est un polynôme trigonométrique de degré inférieur ou égal à $2n-2$.

b. $|g(\theta)-g(\theta-t)| \leqslant \omega_g(|t|)$ par définition de ω_g et $\omega_g(|t|) \leqslant (1+n|t|)\,\omega_g\Big(\frac{1}{n}\Big)$ par **I-1-b**.

$$\begin{aligned} |g(\theta)-j_n[g](\theta)| &= \Big|\frac{1}{2\pi}\int_{t=-\pi}^{\pi}(g(\theta)-g(\theta-t))K_n(t)\,\mathrm{d}t\Big| \\ &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{t=-\pi}^{\pi}(1+n|t|)\omega_g\Big(\frac{1}{n}\Big)K_n(t)\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \frac{1}{\pi}\int_{t=0}^{\pi}(1+n|t|)\omega_g\Big(\frac{1}{n}\Big)K_n(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{(parité de } K_n\text{)} \\ &\leqslant M_0\,\omega_g\Big(\frac{1}{n}\Big). \end{aligned}$$

Remarque : ceci prouve que si g est continue (et donc uniformément continue puisque périodique) alors $j_n[g]$ converge uniformément vers g sur $\mathbf{R}$ quand $n \to \infty$.

I-4. Polynôme associé à une fonction de l'espace C :

a. $j_{p+1}[g]$ est un polynôme trigonométrique pair de degré au plus $2p \leqslant n$ donc admet une décomposition de la forme : $j_{p+1}[g](\theta) = \sum_{k=0}^{n} a_k\cos(k\theta)$. On a alors $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_kT_k(x)$ avec $T_k(x) = \cos(k\arccos x)$ ce qui prouve que P_n est un polynôme de degré au plus n.

b. On a $\Delta_n(f) \leqslant M_0\,\omega_g\Big(\frac{1}{p+1}\Big)$ d'après **I-3-b**. De plus, pour $x,y\in I$ et $h>0$ avec $|x-y|\leqslant h$ on a $|\cos x-\cos y|\leqslant h$ car cos est 1-lipchitzienne donc $|g(x)-g(y)| = |f(\cos x)-f(\cos y)| \leqslant \omega_f(h)$. En prenant la borne supérieure sur x,y on en déduit $\omega_g(h)\leqslant\omega_f(h)$ et en particulier :

$$\omega_g\Big(\frac{1}{p+1}\Big) \leqslant \omega_f\Big(\frac{1}{p+1}\Big) \leqslant \omega_f\Big(\frac{2}{n}\Big) \leqslant 2\omega_f\Big(\frac{1}{n}\Big)$$

car $\frac{1}{p+1} \leqslant \frac{2}{n}$ et ω_f est croissante d'où l'inégalité demandée.

c. $\{f-P \mid P\in \mathbf{E}_n\} = \{(f-Q)-P \mid P\in\mathbf{E}_n\}$ d'où $\Delta_n(f)=\Delta_n(f-Q)$.
Soit $Q\in\mathbf{E}_n$ tel que $\Delta_{n-1}(f')=\|f'-Q'\|$:
on a $\Delta_n(f)=\Delta_n(f-Q)\leqslant 2M_0\,\omega_{f-Q}\left(\frac{1}{n}\right)\leqslant 2M_0\frac{\|f'-Q'\|}{n}=2\frac{M_0}{n}\Delta_{n-1}(f')$.

d. On a $\Delta_n(f)\leqslant \dfrac{(2M_0)^k}{n(n-1)\dots(n-k+1)}\Delta_{n-k}(f^{(k)})$ par récurrence sur k si $n-k\geqslant 2$ car **I-4-c** n'a été établie que pour $n\geqslant 3$. En fait, la restriction $n\geqslant 3$ est sans objet, et les raisonnements précédents peuvent être conduits pour tout $n\geqslant 1$ d'où $\Delta_n(f)\leqslant \dfrac{(2M_0)^k}{n(n-1)\dots(n-k+1)}\Delta_{n-k}(f^{(k)})$ pour $0\leqslant k\leqslant n$.
A k fixé, $\Delta_{n-k}(f^{(k)})\leqslant 2M_0\,\omega_{f^{(k)}}\left(\frac{1}{n}\right)\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ d'où $\Delta_{n-k}(f^{(k)})=\mathrm{o}(1)$ et $\Delta_n(f)=\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^k}\right)$.

Seconde partie

II-1. L'espace préhilbertien $\mathbf{E}_n^0$:

a. $f\in\mathbf{E}_n^0 \iff \exists\, g\in\mathbf{E}_{n-2} \mid f(x)=(x-1)(x+1)g(x)$ et l'application $\Phi\ :\ f\longmapsto g$ définit un isomorphisme linéaire entre $\mathbf{E}_n^0$ et $\mathbf{E}_{n-2}$. Donc $\dim(\mathbf{E}_n^0)=n-1$ et B est une base de $\mathbf{E}_n^0$ en tant qu'image réciproque par Φ de la base canonique de $\mathbf{E}_{n-2}$.

b. On remarque que si $P\in\mathbf{E}_n^0$ alors $\Phi_n(P)\in\mathbf{E}_n^0$ donc Φ_n est bien un endomorphisme de $\mathbf{E}_n^0$ et de plus, si $\deg(P)\geqslant 2$ alors $\deg(\Phi_n(P))=\deg(P)$. Il en résulte que le drapeau associé à $(e_2,\dots,e_n)$ est stable par Φ_n donc M_n est triangulaire supérieure. Le $(k-1)$-ème coefficient diagonal de M_n est le coefficient de degré k de $\Phi_n(e_k)$ soit : $-k(k-1)$.
Les coefficients diagonaux de M_n sont les valeurs propres de Φ_n, ils sont deux à deux distincts donc Φ_n est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont de dimension 1. On note $\mu_k=-k(k-1)$ et Q_k le polynôme propre unitaire associé (unique puisque le sous-espace propre est de dimension 1) ; la famille (Q_k) constitue une base de $\mathbf{E}_n^0$ comme concaténée d'une base de chaque sous-espace propre.
Pour $k\geqslant 3$, μ_k est valeur propre de Φ_k et n'est pas valeur propre de Φ_{k-1} donc $Q_k\in\mathbf{E}_k^0\setminus\mathbf{E}_{k-1}^0$ et en particulier $\deg(Q_k)=k$. Pour $k=2$ on a $Q_2=e_2$ de manière évidente donc $\deg(Q_2)=2$ soit $\deg(Q_k)=k$ pour tout $k\in[\![2,n]\!]$.

c. Soient $P,Q\in\mathbf{E}_n^0$: $P(x)=(1-x^2)P_1(x)$ et $Q(x)=(1-x^2)Q_1(x)$ avec $P_1,Q_1\in\mathbf{E}_{n-2}$.
On a donc $J(P,Q)=\displaystyle\int_{x=-1}^{1}(1-x^2)P_1(x)Q_1(x)\,\mathrm{d}x$ qui existe en tant qu'intégrale sur un segment d'une fonction continue.
Pour $Q=P$ on obtient :

$$J(P,P)=\int_{x=-1}^{1}(1-x^2)P_1(x)^2\,\mathrm{d}x\geqslant 0 \text{ et } J(P,P)=0\Longrightarrow \forall\, x\in[-1,1],\ (1-x^2)P_1^2(x)=0\Longrightarrow P_1=0$$

(polynôme ayant une infinité de racines), soit $J(P,P)=0\Longrightarrow P=0$.

d. Pour $P,Q\in\mathbf{E}_n^0$ on a :

$$(\Phi_n(P)\mid Q)=\int_{x=-1}^{1}P''(x)Q(x)\,\mathrm{d}x=\underbrace{\big[P'(x)Q(x)\big]_{x=-1}^{1}}_{=0}-\int_{x=-1}^{1}P'(x)Q'(x)\,\mathrm{d}x=-\int_{x=-1}^{1}P'(x)Q'(x)\,\mathrm{d}x$$

donc par symétrie du résultat, $(\Phi_n(P)\mid Q)=(\Phi_n(Q)\mid P)$ c'est à dire que Φ_n est un endomorphisme autoadjoint de $(\mathbf{E}_n^0,(\mid))$. Il en résulte que ses sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux et la base propre $(Q_k)_{2\leqslant k\leqslant n}$ est une base orthogonale de $(\mathbf{E}_n^0,(\mid))$.

II-2. Racines du polynôme Q_n :

a. Si $P\in\mathbf{E}_{n-3}$ alors le polynôme Q tel que $Q(x)=(1-x^2)P(x)$ appartient à $\mathbf{E}_{n-1}^0$ donc est combinaison linéaire de $Q_2,\dots,Q_{n-1}$ et est orthogonal à Q_n. En écrivant $(Q\mid Q_n)=0$ on obtient $K=0$ comme demandé.

b.

i. R_1Q_n n'a que des racines de multiplicité paire dans $\mathring{I}$ donc est de signe constant sur I et est non nul car R_1 et Q_n ne sont pas nuls. D'où $\displaystyle\int_{x=-1}^{1}R_1(x)Q_n(x)\,\mathrm{d}x\neq 0$.
On en déduit que $\deg(R_1)\geqslant n-2$ et comme $(x^2-1)R_1(x)$ divise $Q_n(x)$ on a aussi $\deg(R_1)\leqslant n-2$ soit finalement $\deg(R_1)=n-2$.

ii. Par hypothèse Q_n est de signe constant sur I et est non nul d'où $\displaystyle\int_{x=-1}^{1} Q_n(x)\,\mathrm{d}x \neq 0$ ce qui contredit **a** avec $P = 1$. Ce cas est donc impossible.
On en déduit que le cas ***i*** est le seul possible et $p = n-2$, d'où $Q_n(x) = (x^2-1)R_1(x)$ et Q_n a n racines simples situées sur le segment I.

II-3. Polynôme $I_n[f]$:

a. Théorie classique de l'interpolation de Lagrange.
L'application I_n est clairement linéaire et pour $P \in \mathbf{E}_n$ on a $I_n[P] = P$ d'où la relation : $I_n[f-P] = I_n[f] - P$.

b. Immédiat à partir de la factorisation de Q_{n+1} et de la formule d'interpolation de Lagrange.

c. D'après la formule précédente,

$$|f(x) - I_n[f](x)| \leqslant |f(x)| + |I_n[f](x)| \leqslant |f(x)| + \sum_{k=0}^{n} |f(y_k)||L_k(x)| \leqslant \Big(1 + \sum_{k=0}^{n} |L_k(x)|\Big)\|f\|.$$

En remplaçant f par $f - P$ on obtient l'inégalité demandée.

II-4. Majoration de $\sum\limits_{k=0}^{n} |L_k(x)|$:

a. Il s'agit d'une adaptation immédiate de la théorie de l'interpolation de Lagrange (interpolation de Hermite).
Pour tout polynôme $P \in \mathbf{E}_{2n+1}$ on a $H_n[P] = P$, en particulier $H_n[1] = 1$.

b. D'après la formule de Taylor pour Q_{n+1} en y_k on a :

$$Q_{n+1}(x) = \underbrace{Q_{n+1}(y_k)}_{=0} + (x-y_k)Q'_{n+1}(y_k) + \frac{1}{2}(x-y_k)^2 Q''_{n+1}(y_k) + \ldots + \frac{1}{(n+1)!}(x-y_k)^{n+1}Q^{(n+1)}_{n+1}(y_k),$$

d'où :

$$L_k(x) = 1 + (x-y_k)\frac{Q''_{n+1}(y_k)}{2Q'_{n+1}(y_k)} + \ldots + (x-y_k)^n \frac{Q^{(n+1)}_{n+1}(y_k)}{(n+1)!\,Q'_{n+1}(y_k)}.$$

En particulier, $L'_k(y_k) = \dfrac{Q''_{n+1}(y_k)}{2Q'_{n+1}(y_k)}$.
$Q''_{n+1}(y_k) = \dfrac{\mu_{n+1}Q_{n+1}(y_k)}{1-y_k^2} = 0$ donc $L'_k(y_k) = 0$ pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$.
On a aussi : $\mu_{n+1}Q_{n+1}(x) = (1-x^2)Q''_{n+1}(x)$ d'où $\mu_{n+1}Q'_{n+1}(x) = (1-x^2)Q'''_{n+1}(x) - 2xQ''_{n+1}(x)$ et pour $x = \pm 1$: $\mu_{n+1}Q'_{n+1}(\pm 1) = \mp 2Q''_{n+1}(\pm 1)$ soit : $L'_0(y_0) = \mu_{n+1}/4 = -n(n+1)/4$ et $L'_n(y_n) = n(n+1)/4$.

c. On a :

$$1 = H_n[1](x) = \sum_{k=0}^{n}(1 - 2(x-y_k)L'_k(y_k))L_k^2(x) = \sum_{k=0}^{n} L_k^2(x) + \frac{n(n+1)}{2}((1+x)L_0^2(x) + (1-x)L_n^2(x))$$

donc $\sum\limits_{k=0}^{n} L_k^2(x) \leqslant 1$ pour $x \in I$ car le dernier terme est positif. La majoration : $\sum\limits_{k=0}^{n} |L_k(x)| \leqslant \sqrt{n+1}$ s'en déduit par application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

II-5. Estimation de l'approximation :

$\|f - I_n[f]\| \leqslant (1 + \sqrt{n+1})\Delta_n(f)$ d'après **II-3-c** et **II-4-c**, et on a :

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leqslant \frac{1}{1+\sqrt{n}} \leqslant \frac{n-1}{1+\sqrt{n}} = \sqrt{n} - 1$$

d'où $1 + \sqrt{n+1} \leqslant 2\sqrt{n}$.
Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ on a $\|f - I_n[f]\| = \mathrm{o}\Big(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\Big)$ d'après **I** et si f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ on a $\|f - I_n[f]\| = \mathrm{o}\Big(\dfrac{1}{n^\alpha}\Big)$ pour tout réel $\alpha > 0$.

FIN DU PROBLÈME