Le but du problème est la définition et les propritées des valeurs et vecteurs co-propres d'une application semi linéaire ! Pourquoi co- ?

Problème "co" et progressif ! Exemple d'un problème con-forme au programme (voir le ronéo sur les formes J-quadratiques), qui permet de trier les candidats, les notes devant s'échelonner de 0 à 20. Le nombre de résultats non donnés explicitement est rare (I-1.b, II-3.a.b, II-5.b, II-6.b) et doit rendre la correction difficile. L'objet de chaque question est signalé en caractère gras, la fin du problème est indiquée.

Le seul reproche est dans la rédaction de I.4.b et II-2,4,5 où l'on voit apparaître une valeur propre positive ou nulle au lieu d'une valeur propre réelle positive ou nulle.

On aimerait connaître quelques utilisations pratiques de la théorie des valeurs co-propres !

Première Partie

I-1 Premières propriétés.

I-1.a) Au plus une valeur propre : S'il y avait deux valeurs propres différentes μ et μ' associées au même vecteur propre x, on aurait $u(x) = \mu x = \mu' x$ donc $(\mu - \mu')x = 0$ et donc $x = 0$, qui ne serait plus propre.

I-1.b) $\mu \mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}$ est encore co-propre : Comme $u(x) = \mu x$, alors $u(e^{-i\frac{\theta}{2}}x) = \overline{e^{-i\frac{\theta}{2}}}u(x) = e^{i\frac{\theta}{2}}u(x) = e^{i\theta}\mu e^{-i\frac{\theta}{2}}x$; ainsi $\boxed{\mathbf{e}^{-\mathbf{i}\frac{\theta}{2}}\mathbf{x}}$ est co-propre associé à la valeur co-propre $e^{i\theta}\mu$.

I-1.c) $\mathbf{E}_\mu$ est-il espace vectoriel . Il y a bien additivité puisque $u(x+x') = u(x)+u(x') = \mu x+\mu x' = \mu(x+x')$ mais comme $u(ax) = \mu\overline{a}x$, E_μ n'est pas un espace vectoriel complexe, (sauf si $\mu = 0$, cas du noyau) ; mais un espace vectoriel réel car alors $\overline{a} = a$ quand a est réel.

I-1.d) Linéarité de la composée : On a en effet, immédiatement $u \circ v(ax + by) = u(\overline{a}v(x) + \overline{b}v(y)) = \overline{\overline{a}}(u \circ v)(x) + \overline{\overline{b}}(u \circ v)(y) = a(u \circ v)(x) + b(u \circ v)(y)$.

I.2 Matrice associée à une application linéaire.

I-2.a) Écriture $\mathbf{Y} = \mathbf{A}\overline{\mathbf{X}}$: Comme dans le cours sur les applications linéaires $u(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} \overline{x_i}u(e_i)$ et en écrivant $u(e_i) = \begin{pmatrix} a_1^i \\ \vdots \\ a_n^i \end{pmatrix}$ on a bien l'écriture symbolique $Y = A\overline{X}$

I-2.b) Changement de base : S étant la matrice de passage de la base (e) à la base (f) on rappelle que sa colonne numéro i est la colonne des composantes de f_i écrit sur la base (e). On note x'_i les composantes de x sur la base (f).

$x = \sum_i x'_i f_i = \sum_i x'_i \sum_j a_j^i e_j =_{\text{permutation justifiée des sommes finies}} \sum_j \sum_i x'_i a_j^i e_j$ par conséquent par unicité de décomposition de x sur la base (e) on a $x_j = \sum_{i=1^n} x'_i a_j^i$ soit en détaillant $\begin{cases} x_1 = a_1^1 x'_1 + ... + a_1^n x'_n \\ .... \\ x_n = a_n^1 x'_1 + ... + a_n^n x'_n \end{cases}$, ce qui matriciellement donne $\boxed{\mathbf{X{=}SX'}}$;

Mais $y = u(x)$ s'écrit $Y = A\overline{X}$ soit $SY' = A\overline{SX'} = A\overline{S}\overline{X'}$ et ainsi $\boxed{\mathbf{B} = \mathbf{S^{-1}A\overline{S}}}$

I-3 Exemples :

I-3.a) Traiter un exemple : Le mot “rechercher” est maladroit car laisse supposer a priori l’existence d’une solution ! Matriciellement le problème posé s’écrit $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{a} \\ \overline{b} \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ soit $\begin{cases} -\overline{b} = \mu a \\ \overline{a} = \mu b \end{cases}$; la première équation équivaut par conjugaison à $b = -\overline{\mu a}$ qui en reportant dans la seconde donne $\overline{a} = \mu(-\overline{b}\overline{a})$ soit $\overline{a}(1+\mu\overline{\mu}) = \overline{a}(1+|\mu|^2) = 0$ qui donne $a = 0$ puis $b = 0$; **il n’y a pas de solution : une matrice réelle n’a pas nécessairement de valeur co-propre !**

I-3.b) Si une matrice réelle admet une valeur propre réelle, elle a une valeur co-propre : A est réelle et admet une valeur propre réelle λ, elle possède donc un vecteur propre réel associé à λ, noté X. Si $AX = \lambda X$ alors $\overline{AX} = AX = A\overline{X} = \overline{\lambda X} =_{\lambda \text{ est réel}} \lambda X$: X est ainsi λ co-propre.

Correspondance entre les valeurs co-propres de A et des valeurs propres de $\mathbf{A\overline{A}}$.

I-4.a) μ co-propre pour A implique $|\mu|^2$ propre pour $\mathbf{A\overline{A}}$: L’hypothèse s’écrit $A\overline{X} = \mu X$ soit par conjugaison $\overline{A}X = \overline{\mu}\overline{X}$ et donc $A\overline{A}X = A\overline{\mu}\overline{X} = \overline{\mu}A\overline{X} = \overline{\mu}\mu X$ cqfd.

I-4.b) $\sqrt{\lambda}$ est co propre pour A :

• **cas (i) :** Si $A\overline{X} = kX$ alors par conjugaison $\overline{A}X = \overline{kX}$ et d’une part par hypothèse $A\overline{A}X = \lambda X$ et d’autre part $A\overline{A}X = A(\overline{kX}) = \overline{\overline{k}}A(\overline{X}) = k^2 X =_{\text{Si } \mu \text{ est une valeur éventuelle co-propre de A}} |\mu|^2 X$; le nombre réel $k = \sqrt{\lambda}$ convient pour être co-propre.

• **cas (ii) :** Question méchante : la difficulté étant d’imaginer un vecteur co-propre associé !

Comme par hypothèse $A\overline{X}$ et X sont linéairement indépendants, on constuit le vecteur $Y = aA\overline{X} + bX$ qui n’est nul que si $(a,b) = (0,0)$; on a $\overline{Y} = \overline{a}\overline{A}X + \overline{b}\overline{X}$ et ainsi $A\overline{Y} = aA\overline{A}X + bA\overline{X} = a\lambda X + bA\overline{X} =_{\text{On veut pour Y propre}} \sqrt{\lambda}Y = \sqrt{\lambda}(aA\overline{X} + bX)$;

L’indépendance de $A\overline{X}$ et X donne la seule possibilité $b = \sqrt{\lambda}a$ et $a\lambda = \sqrt{\lambda}b$ la deuxième contrainte découlant de la première ou triviale si $\lambda = 0$. Par exemple $\boxed{\mathbf{Y = a(A\overline{X} + \sqrt{\lambda}X)}}$ est co-propre pour A avec la valeur co-propre $\sqrt{\lambda}$.

I-4.c) CNS pour que μ soit co-propre de A : Il faut d’après (a) avec μ réel ; il suffit d’après (b).

I-5 Cas d’une matrice triangulaire supérieure :

I-5.a) D’après la question (I.1.b) il suffit de montrer que $|\lambda|$ est valeur co-propre de A, car $\lambda e^{i\theta} = |\lambda|e^{i(\theta+\varphi)}$ *(φ étant un argument de λ).* Mais, d’après (I.4.c) il suffit de prouver que $|\lambda|^2$ est valeur co-propre de $A\overline{A}$. Ce qui est clair car les valeurs propres d’une matrice triangulaire sont ses coefficients diagonaux et les coefficients diagonaux d’un produit de matrices triangulaires supérieures sont les produits des coefficients diagonaux de chacune de ces matrices.

I-5.b) Existence de θ pour que $e^{i\theta}\mu$ soit valeur propre : D’après (I-4.a.b.c), comme les valeurs propres de $A\overline{A}$ sont (elle est triangulaire) les $|a_{i,i}|^2$, on a $|\mu|^2 = |a_{i,i}|^2$; ayant deux nombres complexes de même module, ils diffèrent seulement par leurs arguments (modulo 2π) (éventuellement arbitraires si les nombres sont nuls) et on a $a_{i,i} = \mu e^{i\theta}$.

I-5.c) Exemple : Ici $\lambda_1 = \lambda_2 = i$; D’après (I-5.a) $\lambda.(-i) = 1$ est valeur co-propre de A.

Comme le suggère l’énoncé on doit résoudre le problème : $\begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a-ib \\ c-id \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+ib \\ c+id \end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix} ia+b+c-id \\ ic+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+ib \\ c+id \end{pmatrix}$, ce qui donne le système $\begin{cases} ia+b+c-id = a+ib \\ c+id = ic+d \end{cases}$;

En identifiant partie réelle et partie imaginaire de la seconde ligne $d = c$ et en reportant dans la première $ia + b + c - ic = a + ib \iff i(a - c - b) + b + c - a = 0$ donc $a = b + c$ Le vecteur $\boxed{\mathbf{X} = \begin{pmatrix} b+c+ib \\ c+ic \end{pmatrix}}$ est co-propre pour A avec la valeur co-propre 1 ; On peut faire une vérification d'ailleurs immédiate.

I-6 : Une caractérisation des valeurs co-propres :

I-6) μ co-propre si et seulement si $|\mu|$ propre pour D :

La seule difficulté de la question est de maîtriser le lien entre les vecteurs propres de A et ceux de D ; Soit $\mu = a+ib$ valeur co-propre pour A et soit $X = Y+iZ$ un vecteur co-propre associé; avec Y, Z vecteurs réels : cela s'écrit analytiquement $(B+iC)(Y-iZ) = (a+ib)(Y+iZ) \iff BY+CZ+i(CY-BZ) = aY-bZ+i(bY+aZ)$

Mais d'après (I-1.b) $|\mu| = \mu e^{-i\theta}$ (θ étant argument (arbitrairement choisi si $\mu = 0$) de μ) est encore une valeur co-propre, on peut donc appliquer les identités précédentes avec $a = |\mu|$ et $b = 0$; ce qui donne $\begin{cases} BY + CZ = |\mu| D \\ CY - BZ = |\mu| Z \end{cases}$ et ainsi $\begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix}$ est encore vecteur $\mu-$propre de D.

La réciproque est immédiate car si l'on a le système précédent $(B + iC)(Y - iZ) = |\mu|(Y + iZ)$ et $|\mu|$ est co-propre pour A.

Seconde Partie

Conditions pour qu'une matrice soit co-diagonalisable.

II-1) Relation d'équivalence : Elle est en effet réflexive, symétrique et transitive :
$$\begin{cases} \text{Réflexivité} & : \text{prendre } S = I \\ \text{Symétrie} & : \text{changer } S \text{ en } S^{-1} \\ \text{Transitivité} & : C = TB(\overline{T})^{-1} = TSA(\overline{S})^{-1}(\overline{T})^{-1} = TSA((\overline{TS})^{-1} \end{cases}.$$

II-2) Indépendance des vecteurs co-propres : D'après (I-6) ces vecteurs sont $|\mu_i|$ propres de la matrice réelle D, donc linéairement indépendants, puisque propres réels asscociés à des valeurs propres distinctes de D.

Avec l'hypothèse faite, il existe alors une base de E formée de vecteurs co-propres, puique tout espace de dimension n admet comme base toute famille de n vecteurs indépendants.

II-3.a) Calculer $\mathbf{A\overline{A}}$: *(Consulter avec profit l'exercice d'oral 2000 numéro 228* et Bréal 97 page 174)*

Si $A = S\overline{S}^{-1}$ alors $\boxed{\mathbf{A\overline{A} = S.\overline{S}^{-1}.\overline{S}.(\overline{S})^{-1}} =_{\text{associativité du produit matriciel}} \mathbf{I_n}}$

II-3.b) Réciproque : Le spectre de A est fini (au plus n éléments), tandis que l'ensemble des nombres complexes de module 1 ne l'est pas. Il est donc possible de trouver $t \in \mathbb{C}$ tel que $|t| = 1$ et $A + \overline{t}I_n \in GL_n(\mathbb{C})$.

Soit $e^{i\theta}$ une racine carrée de t. Alors $|det(S(\theta))| = |A + \overline{t}I_n| \neq 0$ et $S(\theta)$ est inversible.

- Alors si l'on pose pour simplifier $u = e^{i\theta}$ on a $S = uA + \overline{u}I_n$ et $\overline{S} = \overline{u}\overline{A} + uI_n$ et $A\overline{S} = \overline{u}A\overline{A} + uA = \overline{u}I_n + uA = S$; et ainsi $\boxed{\mathbf{A\overline{S}(\theta) = S(\theta)}}$
- Alors S étant inversible $\overline{S}$ aussi et la relation $A\overline{S} = S$ s'écrit $\boxed{\mathbf{A = S(\overline{S})^{-1}}}$

II-4) Condition nécéssaire pour que A soit co-diagonisable :

Posant $A' = S^{-1}A\overline{S}$ il est immédiat que $A\overline{A'} = S^{-1}A\overline{A}S$; comme $A'\overline{A'}$ est diagonale, $A\overline{A}$ est bien diagonalisable, d'ailleurs si la même base qui co-diagonalise A. Ses valeurs propres sont celles que $A'\overline{A'}$ module au carré de éléments diagonaux de A' sont bien positifs ou nuls.

- Le rang de A est égale à celui de $A' = diag(t_1, .., t_n)$, qui est égal au nombre des t_i non nuls ; or $A'\overline{A'} = diag(|t_1|^2, ..., |t_n^2|)$ a pour cette raison même rang que A' ; les deux matrices so-semblables $A\overline{A}$ et $A'\overline{A'}$ ont même rang, égal en outre à celui de A' donc de A.

II-5 une condition suffisante.

II-5.a) relations : $B\overline{B} = S^{-1}A\overline{S}.(\overline{S})^{-1}\overline{A}SS^{-1}A\overline{A}S = S^{-1}S\Lambda S^{-1}S = \Lambda$

De même $\overline{B}B = \overline{(B)^{-1}}\overline{A}SS^{-1}A\overline{S} = \overline{S^{-1}}\overline{A}A\overline{S} =_{\overline{A}A=\overline{S\Lambda S^{-1}}=_{\Lambda \text{ réelle}}\overline{S}\Lambda\overline{S^{-1}}} \overline{(S)^{-1}}\overline{S}\Lambda\overline{S}\overline{S^{-1}} = \lambda$

Ainsi $\boxed{\mathbf{B\overline{B}} = \lambda = \mathbf{\overline{B}B}}$

• Multipliant $B\overline{B} = \Lambda$ à droite par B on a $B\overline{B}B = \lambda B$; de même multipliant $\overline{B}B = \Lambda$ à gauche par B on a $B\overline{B}B = B\lambda$;

Par conséquent $\boxed{B\Lambda = \lambda B}$ B et Λ COMMUTENT !

II-5.b) Écriture par blocs : On est ramené à la recherche du commutant d'une matrice diagonale de blocs scalaires ; il est classique (méthode des coefficients indéterminés), que le commutant d'une telle matrice A s'écrit sous la forme indiquée.

II-5.c) Existence de P : On procède par blocs, par exemple pour le premier bloc : $B_1\overline{B_1} = \lambda_1 I_{n_1}$

On applique à chaque bloc le résultat de la question (II-3.b) en remarquant que si $\lambda_1 > 0$, $\frac{B_1}{\sqrt{\lambda_1}}\frac{\overline{B_1}}{\sqrt{\lambda_1}} = I_{n_1}$; donc il existe une matrice inversible S_1 carrée d'ordre n_1 telle que $B_1 = \sqrt{\lambda_1}S_1\overline{S_1^{-1}}$.

Si $\lambda_k = 0$ on prend S_k inversible quelconque. Si nous montrons que B_k est nulle nous aurons alors $B_k = S_k 0\overline{S_k^{-1}}$. Pour cela on utilise l'hypothèse sur le rang. B et A ont même rang, noté r, qui est aussi celui de $A\overline{A}$ ou celui de Λ. La structure diagonale de Λ donne $r = \text{rg}(\Lambda) = n - n_k$. Puisque chaque B_i, $1 \leq i \leq k-1$, est inversible, elle est de rang n_i. La structure diagonale par bloc de B donne alors $r = \text{rg}(B) = \sum_i \text{rg}(B_i) = n - n_k + \text{rg}(B_k)$. Par conséquent $\text{rg}(B_k) = 0$ et $B_k = 0$

La matrice P d'ordre n diagonale des blocs $S_1, ..., S_k$ est inversible (chacun des blocs diagonaux l'est) et répond à la question posée.

Le changement de base de matrice de passage SP co-diagonalise A.

II-6 Exemples.

II-6.a) A symétrique réelle est-elle co-diagonalisable ? oui ! car elle vérifie toutes les hypothèses de (II-5) A est diagonalisable sur une base réelle, des valeurs propres λ_i sont réelles ; sur cette base $D\overline{D} = D^2 = diag(\lambda_1^2 \geq 0$; le rang de D est le nombre des valeurs propres non nulles, qui est aussi celui des valeurs propres non nulles de $D^2 = D\overline{D}$.

II-6.b) Chercher si les matrices A...D sont co-diagonalisables :

$A\overline{A} = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -i & 1 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, donc d'après I.3.a A est codiagonalisable.

$B\overline{B} = B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$. Or les valeurs propres de $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ ne sont pas des réels positifs ou nuls. Donc B n'est pas co-diagonalisable.

$C\overline{C} = 0$. C et $C\overline{C}$ n'ont pas même rang donc C n'est pas codiagonalisable.

$D\overline{D} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. $D\overline{D}$ est diagonalisable et ses valeurs propres sont des réels positifs. De plus D et $D\overline{D}$ sont inversibles et par conséquent de même rang. D est co-diagonalisable.
