E3A POLYTECH 2025

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES - MPI

m.laamoum2@gmail.com [1]

EXERCICE 1

Soit $f : m = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \to \sum_{j=1}^{n} e^{x_j} \in \mathbb{R}$.

1. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^n$. Pour trouver les extrema locaux, on cherche d'abord les points critiques, c'est-à-dire les points m où le gradient de f s'annule.

Le gradient de f est

$$\nabla f(m) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(m), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(m) \right) = (\mathrm{e}^{x_1}, \dots, \mathrm{e}^{x_n})$$

L'équation $\nabla f(m) = 0$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}^n$. Par conséquent, f n'admet aucun extremum local.

2. On a $f(x_1, 0, ..., 0) = \mathrm{e}^{x_1} + n - 1 \underset{x_1 \to +\infty}{\to} +\infty$. Donc la fonction f n'est donc pas majorée sur $\mathbb{R}^n$.

3. On sait que $\mathrm{e}^{x_j} > 0$ pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, . Donc $f(m) = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{e}^{x_j} > 0$. Cela signifie que f est minorée par 0.

Soit $g : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{j=1}^{n} x_j$ et $H = g^{-1}(\{0\})$.

4. On utilise la méthode des multiplicateurs de Lagrange.

Si f admet un extremum m_0 sous la contrainte $g(m) = 0$ et et $\nabla g(m_0) \neq 0$ alors $\nabla f(m_0)$ est colinéaire à $\nabla g(m_0)$ (*C'est une condition nécessaire mais pas suffisante*).

On a pour $m = (x_1, \dots, x_n)$:

$$\nabla f(m) = (\mathrm{e}^{x_1}, \dots, \mathrm{e}^{x_n}) \text{ et } \nabla g(m) = (1, \dots, 1)$$

a condition $\nabla g(m) \neq 0$ est toujours réalisée .

Le système des multiplicateurs de Lagrange est :

$$\begin{cases} \nabla f(m) = \lambda \nabla g(m) \\ g(m) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{e}^{x_1} = \lambda \\ \vdots \\ \mathrm{e}^{x_n} = \lambda \\ x_1 + ... + x_n = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = ... = x_n = 0 \text{ et } \lambda = 1$$

Le seul point candidat pour un extremum de la restriction de f à H est $m_0 = (0, \dots, 0)$.

1. Tous mes corrigés sont disponibles ici `https://tinyurl.com/4up84xze` 15-05-2025

5. Soit $\varphi(t) = \mathrm{e}^t - (1+t)$.

On a $\varphi'(t) = \mathrm{e}^t - 1$ et $\varphi'(t) = 0 \iff \mathrm{e}^t = 1 \iff t = 0$.

Si $t \in]-\infty, 0]$, $\varphi'(t) \leq 0$, donc φ est décroissante.

Si $t \in [0, +\infty[$, $\varphi'(t) \geq 0$, donc φ est croissante.

La fonction φ admet donc un minimum global en $t = 0$.

Par conséquent, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi(t) \geq \varphi(0) = 0$, ce qui signifie $\boxed{\mathrm{e}^t \geq 1 + t\ ,\ \forall t \in \mathbb{R}}$.

6. Soit $m = (x_1, \ldots, x_n) \in H$. On a $\sum\limits_{j=1}^{n} x_j = 0$.

D'après la question précédente,

$$\forall j \in [\![1, n]\!], \mathrm{e}^{x_j} \geq 1 + x_j.$$

donc

$$\sum_{j=1}^{n} \mathrm{e}^{x_j} \geq \sum_{j=1}^{n} (1 + x_j) = \sum_{j=1}^{n} 1 + \sum_{j=1}^{n} x_j = n$$

Par suite $f(m) \geq n$ pour tout $m \in H$.

Le point $m_0 = (0, \ldots, 0)$ appartient à H et $f(m_0) = n$.

Comme $f(m) \geq f(m_0)$ pour tout $m \in H$, alors f admet un minimum global, sur H, en $m_0 = (0, \ldots, 0)$.

EXERCICE 2

Soit $n \geq 3$.

Questions préliminaires

1. Soit $\mathbb{K}$ un corps. Pour tous polynômes $P, D \in \mathbb{K}[X]$ avec $D \neq 0$, il existe un unique couple de polynômes $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $P = QD + R$ et $\deg(R) < \deg(D)$.

2. $A = X^n - 1$ et $B = X^n - X$.
On a $A = X^n - 1 = (X^n - X) + X - 1$. On prend $Q(X) = 1$ et $R(X) = X - 1$. Alors $A = QB + R$ et $\deg(R) = 1 < \deg(B) = n$.

3. D'après l'algorithme d'Euclide.
$$\mathrm{PGCD}(A, B) = \mathrm{PGCD}(B, R) = \mathrm{PGCD}(X^n - X, X - 1).$$
Comme $X^n - X = X(X^{n-1} - 1)$ et $X - 1$ divise $X^{n-1} - 1$, donc $\mathrm{PGCD}(X^n - X, X - 1) = X - 1$.
Ainsi $\boxed{\mathrm{PGCD}(A, B) = X - 1}$.

4. Posons $\omega = \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{n}}$ et $\zeta = \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{n-1}}$. Dans $\mathbb{C}[X]$ on a
$$A(X) = \prod_{k=0}^{n-1}(X - \omega^k) \ \text{ et } B(X) = X\prod_{k=0}^{n-2}(X - \zeta^k)$$
Par suite $z_k = \zeta^k = \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n-1}}$ pour $k \in [\![0, n-2]\!]$ et $z_n = 0$.

******

5. f est l'application qui à tout polynôme P de E, associe le reste de la division euclidienne de AP par B.

- **Définition .**
Soit $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X] = E$. Puisque $\deg(B) = n$, le reste de la division AP par B est unique et de degré au plus $n - 1$.
Donc $f(P) \in E$. f est bien une application de E dans E.

- **Linéarité .**
Soient $P_1, P_2 \in E$ et $\alpha \in \mathbb{C}$. Par définition de f :
$$AP_1 = Q_1B + f(P_1) \text{ et } AP_2 = Q_2B + f(P_2), \text{ avec } \deg(f(P_1)) < n \text{ et } \deg(f(P_2)) < n.$$
Alors
$$\begin{aligned} A(\alpha P_1 + P_2) &= \alpha(AP_1) + AP_2 \\ &= \alpha(Q_1B + f(P_1)) + (Q_2B + f(P_2)) \\ &= (\alpha Q_1 + Q_2)B + (\alpha f(P_1) + f(P_2)). \end{aligned}$$
Soit $R'(X) = \alpha f(P_1) + f(P_2)$. On a
$$\deg(R') \leq \max(\deg(f(P_1)), \deg(f(P_2))) < n.$$

Par unicité du reste dans la division euclidienne,

$$f(\alpha P_1 + P_2) = R' = \alpha f(P_1) + f(P_2).$$

Donc f est linéaire , de $E \to E$. f est un endomorphisme de E.

6. Soit $k \in [\![0, n-2]\!]$**.**

On a

$$AX^k = (X^n - 1)X^k = X^{n+k} - X^k$$

écrivons

$$X^{n+k} - X^k = X^k(X^n) - X^k = X^k(B + X) - X^k = X^k B + \left(X^{k+1} - X^k\right).$$

Posons $R_k(X) = X^{k+1} - X^k$.

On a $\deg(R_k) = k + 1 \in [\![1, n-1]\!]$ donc $\deg(R_k) < \deg(B)$.

Ainsi, par unicité du reste dans la division euclidienne $\boxed{f(X^k) = X^{k+1} - X^k \text{ pour } k \in [\![0, n-2]\!].}$

7. De la même façon, on a $B = X^n - X$ et

$$\begin{aligned} AX^{n-1} &= (X^n - 1)X^{n-1} \\ &= (B + X - 1)X^{n-1} \\ &= X^{n-1}B + \left(X^n - X^{n-1}\right) \\ &= X^{n-1}B + \left(B + X - X^{n-1}\right) \\ &= (X^{n-1} + 1)B + X - X^{n-1} \end{aligned}$$

Posons $R_{n-1}(X) = X - X^{n-1}$. On a $\deg(R_{n-1}) = n - 1 < \deg(B)$. Ainsi, $\boxed{f(X^{n-1}) = X - X^{n-1}}$.

8. Du calcul précédent on déduit que $Mat_{\mathcal{B}}(f) = (a_{ij})_{(i,j)\in[\![0,n-1]\!]^2}$, avec

$$a_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{si } i = j \\ 1 & \text{si } i = j+1 \text{ et } j \in [\![0, n-2]\!] \\ 1 & \text{si } i = 2 \text{ et } j = n-1 \end{cases}$$

Ce qui donne

$$Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -1 & \ddots & & 0 & 1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & & \ddots & \ddots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

9. On a $\mathrm{Tr}(M) = \sum_{j=0}^{n-1} a_{j,j}$ et $a_{j,j} = -1$ pour $j \in [\![0, n-1]\!]$. Donc $\boxed{\mathrm{Tr}(M) = -n}$.

Étude du noyau et de l'image de f

10. Soient $C_0, \ldots, C_{n-1}$ les vecteurs colonnes de M.

Posons $(e_0, ..., e_{n-1})$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$, indexée de 0 à $n-1$.

On a

$$C_j = \begin{cases} -e_j + e_{j+1} & \text{si } j \in [\![0, n-2]\!] \\ e_1 - e_{n-1} & \text{si } j = n-1 \end{cases}$$

Les colonnes $C_0, \ldots, C_{n-2}$ forment un système échelonné (*voir la forme de la matrice*) , donc ils sont libres . Cela implique que $\mathrm{rg}(M) \geq n-1$.

Remarquons que

$$\sum_{j=1}^{n-2} C_j = \sum_{j=1}^{n-2} (-e_j + e_{j+1}) = -e_1 + e_{n-1} = -C_{n-1}$$

donc les colonnes $C_0, \ldots, C_{n-1}$ sont liés , par suite $\mathrm{rang}(M) \leq n-1$, d'où $\boxed{\mathrm{rg}(M) = n-1}$.

11. L'image de f est engendrée par $\{f(X^0), \ldots, f(X^{n-1})\}$. Comme $\mathrm{rg}(f) = n-1$, il suffit de trouver $n-1$ vecteurs linéairement indépendants parmi eux. La famille $\{f(X^0), \ldots, f(X^{n-2})\}$ correspond aux colonnes $\{C_0, \ldots, C_{n-2}\}$ qui sont linéairement indépendantes.

Donc, une base de $\mathrm{Im}(f)$ est $\left(f(X^0), \ldots, f(X^{n-2})\right)$. Ainsi $\boxed{\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left(X-1, X^2 - X, \ldots, X^{n-1} - X^{n-2}\right)}$.

12. Dans la question Q10 on a vu que $\sum\limits_{j=1}^{n-1} C_j = 0$, donc

$$\sum_{j=1}^{n-1} f(X^j) = f\left(\sum_{j=1}^{n-1} X^j\right) = 0$$

par suite $\displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} X^j \in \mathrm{Ker}(f)$. Or $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = n - \mathrm{rg}(f) = 1$, donc $\boxed{\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}\left(\sum_{j=1}^{n-1} X^j\right)}$.

13. Posons $S = \{(X-1)P \mid P \in \mathbb{C}_{n-2}[X]\}$.

Soit $Q \in S$ donc il existe $P \in \mathbb{C}_{n-2}[X]$ tel que $Q = (X-1)P$. Posons $P = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-2} a_i X^i$,donc

$$Q = \sum_{i=0}^{n-2} a_i (X-1) X^i = \sum_{i=0}^{n-2} a_i (X^{i+1} - X^i)$$

On en déduit que la famille $\left(X-1, X^2 - X, \ldots, X^{n-1} - X^{n-2}\right)$ est génératrice de S . Cette famille est une base de $\mathrm{Im}(f)$, elle est libre , donc c'est une base de S , d'où $\mathrm{Im}(f) = S$.

14. On a $\dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(E)$.

Pour montrer qu'ils sont supplémentaires, il suffit de montrer que $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$.

Soit $Q \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$.

$Q \in \mathrm{Ker}(f)$ donc $Q = \alpha \displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} X^j$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$.

$Q \in \mathrm{Im}(f)$ donc $Q = (X-1)P$ avec $P \in \mathbb{C}_{n-2}[X]$.

On a $Q(1) = \alpha(n-1) = 0$ donc $\alpha = 0$ et Q=0.

Ce qui donne $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$. Par conséquent, $\boxed{\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = E}$.

Éléments propres de f .

Soit $j \in [\![1, n]\!]$.

15. On a

$P_j(z_j) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} (z_j - z_k)$. Comme les racines $z_1, \ldots, z_n$ de B sont distinctes, donc $P_j(z_j) \neq 0$.

16. Les racines de P_j sont $\{z_k \mid k \in [\![1, n]\!]$ et $k \neq j\}$. Par définition de f, $AP_j = Q_j B + R_j$ pour un certain quotient Q_j et $\deg(R_j) \leq n - 1$. Soit $\ell \in [\![1, n]\!]$ et $\ell \neq j$. On a

$$A(z_\ell) P_j(z_\ell) = Q_j(z_\ell) B(z_\ell) + R_j(z_\ell).$$

Comme z_ℓ est une racine de P_j et de B, alors $R_j(z_\ell) = 0$.

Ainsi, toute racine z_ℓ de P_j (où $\ell \neq j$) est aussi une racine de R_j.

17. R_j est de degré $n - 1$ et a les mêmes racines que P_j , qui est aussi de degré $n - 1$, donc il exite λ_j dans $\mathbb{C}$ tel que $\boxed{R_j = \lambda_j P_j}$. Comme $f(P_j) = R_j = \lambda_j P_j$ et $P_j \neq 0$ (car $\deg(P_j) = n - 1$), alors P_j est un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ_j.

18. On a $AP_j = Q_j B + R_j$ et $R_j = \lambda_j P_j$, donc

$$(A - \lambda_j) P_j = Q_j B.$$

Évaluons-la en $X = z_j$:

$$(A(z_j) - \lambda_j) P_j(z_j) = Q_j(z_j) B(z_j) = 0 \text{ (car } B(z_j) = 0 \text{).}$$

D'après la question 15, $P_j(z_j) \neq 0$. Par conséquent, $A(z_j) - \lambda_j = 0$, et $\boxed{A(z_j) = \lambda_j}$.

19. On a

$$\lambda_j = A(z_j) = z_j^n - 1.$$

Puisque z_j est une racine de $B(X) = X^n - X$, donc $z_j^n = z_j$ et $\lambda_j = z_j - 1$.

Ainsi $\boxed{\lambda_j = z_j - 1 = \mathrm{e}^{i\frac{2j\pi}{n-1}} - 1,\ \forall j \in [\![1, n-1]\!] \text{ et } \lambda_n = -1}$

20. On a f un endomorphisme en dimension n, qui a n valeurs propres distinctes , $\lambda_j = z_j - 1 \quad j \in [\![1, n]\!]$. Donc f est diagonalisable.

21. La trace d'un endomorphisme diagonalisable est la somme de ses valeurs propres. Donc

$$\mathrm{Tr}(f) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = \sum_{j=1}^{n} (z_j - 1) = \left(\sum_{j=1}^{n} z_j \right) - n.$$

Les z_j sont les racines de $B(X) = X^n - X$. D'après les relations entre les coefficients et les racines , le coefficient, dans B, de X^{n-1} est nul et vaut $\sum_{j=1}^{n} z_j$ donc $\sum_{j=1}^{n} z_j = 0$, ce qui donne $\mathrm{Tr}(f) = -n$.

22. Les racines du polynôme caractéristique de f sont $\lambda_j = z_j - 1$, $j \in [\![1, n]\!]$.

On a

$$\chi_f(X) = \prod_{j=1}^{n} (X + \lambda_j) = \prod_{j=1}^{n} (X - z_j + 1) = \prod_{j=1}^{n} ((X + 1) - z_j).$$

Or $B(X) = \prod_{j=1}^{n} (X - z_j)$ donc

$$\chi_f(X) = B(X + 1) = (X + 1)^n - (X + 1)$$

par suite

$$\chi_f(X)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}X^k-X-1$$

Ainsi $\boxed{\chi_f(X)=\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}X^k+(n-1)X}$.

23. On a $\mathrm{Ker}(f)\oplus\mathrm{Im}(f)=E$, $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont stables par f .

Si $\mathcal{B}_0=(\varepsilon_1)$ une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathcal{B}_1=(\varepsilon_2,...,\varepsilon_n)$ une base de $\mathrm{Im}(f)$,alors $\mathcal{B}=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_n)$ est une base de E . On a

$$Mat_{\mathcal{B}}(f)=\left(\begin{array}{c|c} Mat_{\mathcal{B}_0}(f_{|\mathrm{Ker}(f)}) & 0 \\ \hline 0 & Mat_{\mathcal{B}_1}(f_{|\mathrm{Im}(f)}) \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c} 0 & 0\ \cdots\ 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & Mat_{\mathcal{B}_1}(f_{|\mathrm{Im}(f)}) \\ 0 & \end{array}\right)$$

par suite

$$\chi_f(X)=\left|\begin{array}{c|c} X & 0\ \cdots\ 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & X\mathrm{I}_{n-1}-Mat_{\mathcal{B}_1}(f_{|\mathrm{Im}(f)}) \\ 0 & \end{array}\right|=X\chi_{f_{|\mathrm{Im}(f)}}(X)$$

d'après Q22

$$X\chi_{f_{|\mathrm{Im}(f)}}(X)=\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}X^k+(n-1)X$$

donc

$$\chi_{f_{|\mathrm{Im}(f)}}(X)=\det\left(X\mathrm{I}_{n-1}-Mat_{\mathcal{B}_1}(f_{|\mathrm{Im}(f)})\right)=\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}X^{k-1}+(n-1)$$

Pour $X=0$, on a

$$\det\left(-Mat_{\mathcal{B}_1}(f_{|\mathrm{Im}(f)})\right)=n-1$$

Ainsi $\boxed{\det(f|_{\mathrm{Im}(f)})=\det\left(Mat_{\mathcal{B}_1}(f_{|\mathrm{Im}(f)})\right)=(-1)^{n-1}(n-1)}$.

EXERCICE 3

Questions préliminaires

1. On a $\forall t \in \left]-1,1\right[,\ \dfrac{1}{1-t} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} t^n$

2. Par la règle de d'Alembert on a $R_{cv}(\sum (n+1)t^n) = 1$.

Soit $t \in \left]-1,1\right[$, on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t}$$

et

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} t^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} nt^{n-1} = \frac{1}{(1-t)^2}$$

donc

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)t^n = t\sum_{n=0}^{\infty} nt^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{t}{(1-t)^2} + \frac{1}{1-t}$$

Ainsi $\boxed{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)t^n = \frac{1}{(1-t)^2} \text{ pour tout } t \in \left]-1,1\right[}$.

3. Produit de Cauchy .

L'expression correcte est **(a)** $c_n = \displaystyle\sum_{p+q=n} a_p b_q$ (ou $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$).

4. Sommes de Riemann.

Si f est continue sur $[a,b]$, alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x)\,dx.$

*****

On note : $E_x = \left\{m = (a,b) \in \mathbb{N}^2, \sqrt{a^2+b^2} \leq x\right\}$ et $G(x) = \mathrm{Card}(E_x)$.

5. On a $E_2 = \left\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 \mid \sqrt{a^2+b^2} \leq 2\right\}$ donc

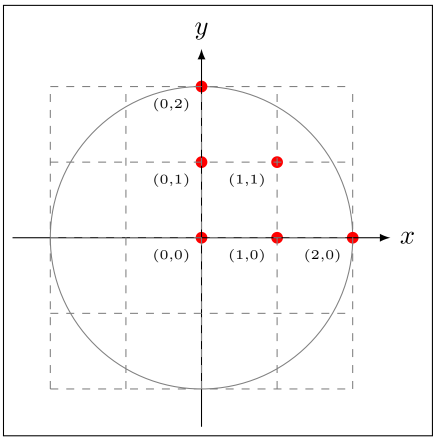
$$(a,b) \in E_2 \Leftrightarrow (a,b) \in \mathbb{N}^2 \text{ et } a^2+b^2 \leq 4 \Leftrightarrow (a,b) \in [\![0,2]\!]^2 \text{ et } a^2+b^2 \leq 4.$$

par suite

$$E_2 = [\![0,2]\!]^2 \backslash \left\{(1,2),(2,1),(2,2)\right\} = \left\{(0,0),(0,1),(0,2),(1,0),(1,1),(2,0)\right\}$$

et $G(2) = 6$.

Graphiquement, E_2 est l'ensemble des points à coordonnées entières positives ou nulles dans le disque de centre $(0,0)$ et de rayon 2.



6. On pose $t = \sin(u)$. Alors

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\pi/2} (1-\sin^2(u))^{1/2}\cos(u)\,du \\ &= \int_0^{\pi/2} \cos^2(u)\,du \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos(2u)}{2}\,du \\ &= \left[\frac{u}{2}+\frac{\sin(2u)}{4}\right]_0^{\pi/2} \end{aligned}$$

d'où $\boxed{J = \frac{\pi}{4}}$.

7. On a

$$G(n) = \mathrm{Card}(E_x) = \mathrm{Card}\left\{(a,b)\in\mathbb{N}^2 \mid a^2+b^2 \le n^2\right\}$$

Remarquons que $E_x \subset [\![0,n]\!]^2$ et

$$E_x = \bigcup_{k\in[\![0,n]\!]} A_k \text{ avec } A_k = \left\{(a,k) \mid a\in[\![0,n]\!] \text{ et } a^2+k^2\le n^2\right\}$$

On a

$$G(n) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Card}(A_k)$$

Puisque

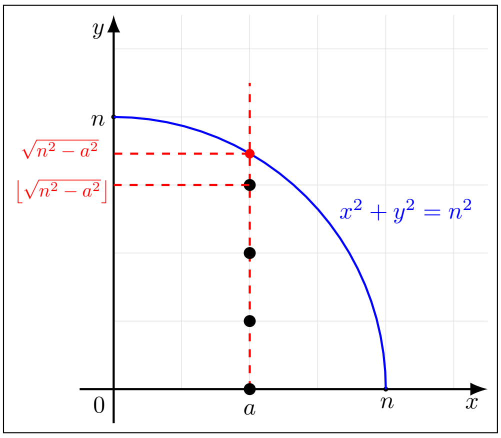
$$A_k = \left\{(a,k) \mid a\in\mathbb{N} \text{ et } 0\le a\le \sqrt{n^2-k^2}\right\}$$

alors

$$\mathrm{Card}(A_k) = \left\lfloor\sqrt{n^2-k^2}\right\rfloor - 0 + 1 = \left\lfloor\sqrt{n^2-k^2}\right\rfloor + 1 \quad (\textit{on compte 0 aussi })$$

par suite

$$G(n) = \sum_{k=0}^{n}\left(\left\lfloor\sqrt{n^2-k^2}\right\rfloor+1\right)$$



8. Soit $f(t) = \sqrt{1-t^2}$. Cette fonction est continue sur $[0,1]$. La suite

$$R_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2}$$

est une somme de Riemann pour f sur $[0,1]$.

Donc elle converge vers $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$.

D'après Q6 on a $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,dt = J = \frac{\pi}{4}$, donc $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} R_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2} = \frac{\pi}{4}}$.

9. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{n^2 - k^2}$.

On a

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{n^2 \left(1 - \left(\frac{k}{n}\right)^2\right)} = n \left(\sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1 - \left(\frac{k}{n}\right)^2}\right) = n^2 R_n.$$

Or $R_n \underset{n \to +\infty}{\to} \frac{\pi}{4}$,donc $\boxed{S_n \underset{n \to +\infty}{\sim} n^2 \frac{\pi}{4}}$.

10. Soit $n \in \mathbb{N}$.On utilise la formule de Q7

$$G(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\left\lfloor \sqrt{n^2 - k^2} \right\rfloor + 1\right)$$

On sait que $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$, donc

$$\sqrt{n^2 - k^2} < \left\lfloor \sqrt{n^2 - k^2} \right\rfloor + 1 \leq \sqrt{n^2 - k^2} + 1$$

En sommant de $k = 0$ à $n - 1$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{n^2 - k^2} < G(n) \leq \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sqrt{n^2 - k^2} + 1\right).$$

donc

$$S_n < G(n) \leq S_n + n$$

On sait que $S_n \underset{n \to +\infty}{\sim} n^2 \frac{\pi}{4}$, donc

$$\frac{S_n}{n^2 \frac{\pi}{4}} < \frac{G(n)}{n^2 \frac{\pi}{4}} \leq \frac{S_n}{n^2 \frac{\pi}{4}} + \frac{1}{n \frac{\pi}{4}}$$

le théorème d'encadrement donne

$$\frac{G(n)}{n^2 \frac{\pi}{4}} \underset{n \to +\infty}{\to} 1.$$

Ainsi $\boxed{G(n) \underset{n \to +\infty}{\sim} n^2 \frac{\pi}{4}}$.

11. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On a $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$. Donc

$$E_{\lfloor x \rfloor} \subset E_x \subset E_{\lfloor x \rfloor + 1}$$

ce qui implique

$$G(\lfloor x \rfloor) \leq G(x) \leq G(\lfloor x \rfloor + 1)$$

D'après Q10 on a

$$G(\lfloor x \rfloor) \underset{x \to +\infty}{\sim} (\lfloor x \rfloor)^2 \frac{\pi}{4} \underset{x \to +\infty}{\sim} x^2 \frac{\pi}{4} \quad (\text{car } \lfloor x \rfloor \underset{x \to +\infty}{\sim} x\ ).$$

et

$$G(\lfloor x \rfloor + 1) \underset{x \to +\infty}{\sim} (\lfloor x \rfloor + 1)^2 \frac{\pi}{4} \underset{x \to +\infty}{\sim} x^2 \frac{\pi}{4} \ (\text{ car } \lfloor x \rfloor + 1 \underset{x \to +\infty}{\sim} x)$$

On en déduit $\boxed{G(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} x^2 \frac{\pi}{4}}$.

12. Soit la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = k^2 \ , \ k \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $|a_n| \leq 1$ donc

$$R_{cv}\left(\sum a_n x^n\right) \geq R_{cv}\left(\sum x^n\right) = 1$$

Si $x = 1$, la série $\sum a_n$ diverge grossièrement , car $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0 (*elle admet une sous suite qui tend vers* 1), donc

$$R_{cv}\left(\sum a_n x^n\right) \leq 1$$

Ainsi $\boxed{R_{cv}\left(\sum a_n x^n\right) = 1}$.

13. Soit $t \in]-1, 1[$, on a $g(t) = \dfrac{h(t)^2}{1-t}$.

Par produit de Cauchy des séries entières on a :

$$h(t)^2 = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^k\right) \cdot \left(\sum_{l=0}^{+\infty} a_l t^l\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n t^n$$

avec

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} \ , \ n \in \mathbb{N}$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \leq n$ on a

$$a_k a_{n-k} = 1 \Leftrightarrow a_k = a_{n-k} = 1 \Leftrightarrow k = p^2 \text{ et } n - k = q^2 \ , p, q \in \mathbb{N}$$

ce qui signifie

$$a_k a_{n-k} = 1 \Leftrightarrow \exists (p, q) \in \left\{(r, s) \in \mathbb{N}^2 \mid r^2 + s^2 = n\right\} \text{ tel que } r = k \text{ et } s = n - k$$

Ainsi, $\boxed{b_n = \text{Card}\left(\left\{(r, s) \in \mathbb{N}^2 \mid r^2 + s^2 = n\right\}\right)}$.

Le produit de Cauchy donne

$$g(t) = h(t)^2 \cdot \frac{1}{1-t} = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} b_k t^k\right) \cdot \left(\sum_{l=0}^{+\infty} t^l\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n t^n$$

avec

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} b_k \ , \ n \in \mathbb{N}$$

Donc

$$c_n = \sum_{j=0}^{n} \text{Card}\left(\left\{(r, s) \in \mathbb{N}^2 \mid r^2 + s^2 = j\right\}\right) = \text{Card}\left(\bigcup_{j=0}^{n} \left\{(r, s) \in \mathbb{N}^2 \mid r^2 + s^2 = j\right\}\right)$$

et remarquons que

$$\bigcup_{j=0}^{n} \left\{(r, s) \in \mathbb{N}^2 \mid r^2 + s^2 = j\right\} = \left\{(r, s) \in \mathbb{N}^2 \mid r^2 + s^2 \leq n\right\}$$

Ainsi

$$c_n = \text{Card}\left(\left\{(r, s) \in \mathbb{N}^2 \mid \sqrt{r^2 + s^2} \leq \sqrt{n}\right\}\right) = G(\sqrt{n})$$

d'où $\boxed{g(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} G(\sqrt{n}) t^n}$.

Un équivalent de g

14. D'après Q11, $G(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2\dfrac{\pi}{4}$, ce qui donne $G(\sqrt{n}) \underset{x\to+\infty}{\sim} n\dfrac{\pi}{4} \underset{x\to+\infty}{\sim} (n+1)\dfrac{\pi}{4}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{G(\sqrt{n})}{n+1} = \dfrac{\pi}{4}$.
Donc pour $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que pour $n \geq n_0$:

$$\left|\frac{G(\sqrt{n})}{(n+1)} - \pi/4\right| \leq \varepsilon.$$

Ainsi

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \text{ tel que } \forall n \geq n_0, \left|G(\sqrt{n}) - \frac{\pi}{4}(n+1)\right| \leq \varepsilon(n+1)$$

15. Soit $t \in [0,1[$, on utilise le résultat précédent pour $\varepsilon/2$. On a

$$\left|g(t) - \frac{\pi}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)t^n\right| = \left|\sum_{n=0}^{\infty}\left(G(\sqrt{n}) - \frac{\pi}{4}(n+1)\right)t^n\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty}\left|G(\sqrt{n}) - \frac{\pi}{4}(n+1)\right|t^n.$$

On sépare la somme en deux somme , de 0 à $n_0 - 1$ et de n_0 à $+\infty$, :

$$\sum_{n=n_0}^{\infty}\left|G(\sqrt{n}) - \frac{\pi}{4}(n+1)\right|t^n \leq \sum_{n=n_0}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2}.(n+1)t^n$$

d'après Q2

$$\sum_{n=n_0}^{\infty}(n+1)t^n \leq \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)t^n = \frac{1}{(1-t)^2}$$

donc

$$\sum_{n=n_0}^{\infty}\left|G(\sqrt{n}) - \frac{\pi}{4}(n+1)\right|t^n \leq \frac{\varepsilon}{2(1-t)^2} \ (1)$$

La deuxième somme vérifie

$$(1-t)^2\sum_{n=0}^{n_0-1}\left|G(\sqrt{n}) - \frac{\pi}{4}(n+1)\right|t^n \underset{t\to1^-}{\to} 0$$

donc

$$\exists \alpha > 0 \text{ tel que } 1-\alpha < t < 1 \Rightarrow (1-t)^2\sum_{n=0}^{n_0-1}\left|G(\sqrt{n}) - \frac{\pi}{4}(n+1)\right|t^n \leq \frac{\varepsilon}{2} \ (2)$$

les relation (1) et (2) donnent

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 \text{ tel que } 1-\alpha < t < 1 \Rightarrow \left|g(t) - \frac{\pi}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)t^n\right| \leq \frac{\varepsilon}{(1-t)^2}$$

qui s'écrit

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 \text{ tel que } 1-\alpha < t < 1 \Rightarrow \left|\frac{g(t) - \frac{\pi}{4}\frac{1}{(1-t)^2}}{\frac{1}{(1-t)^2}}\right| \leq \varepsilon$$

donc

$$\lim_{t\to1^-}\left(\frac{g(t)}{\frac{1}{(1-t)^2}} - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

Ainsi $\boxed{g(t) \underset{t\to1^-}{\sim} \dfrac{\pi}{4}(1-t)^{-2}}$.