E3A POLYTHECH

CORRIGÉ DE MATHÉMATIQUES

Session 2024 - Filière MPI

m.laamoum2@gmail.com [1]

Exercice 1

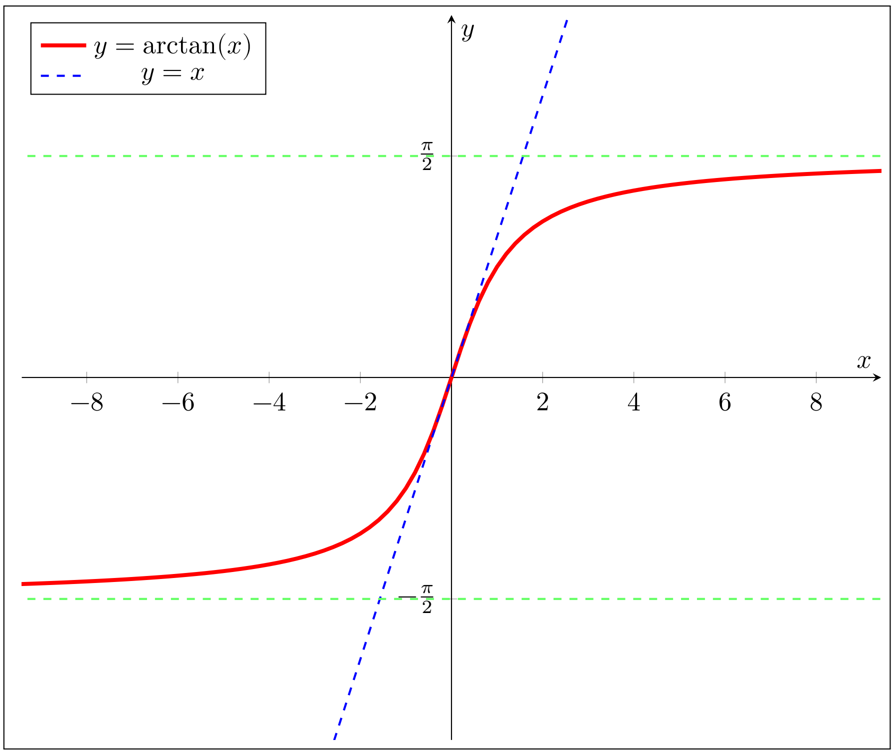
1. La fonction arctan est définie sur $\mathbb{R}$, impaire de classe $\mathscr{C}^\infty$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

2. La fonction $\arctan'$ étant strictement positive sur $\mathbb{R}$, le tableau de variations est donnée par :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\arctan(x)$	$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$

L'équation de la tangente en 0 est $y = \arctan(0) + \arctan'(0)x$, c'est-à-dire $y = x$. Le graphe de arctan possède deux asymptotes horizontales, la droite d'équation $y = -\frac{\pi}{2}$ en $-\infty$ et la droite d'équation $y = \frac{\pi}{2}$ en $+\infty$.
L'allure de la courbe représentative dans un repère orthonormal est donnée par la figure suivante :



[1] https://tinyurl.com/2qyzzrbd

3. La fonction arctan étant $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, elle est continue et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \arctan(x) \leq \frac{\pi}{2}$$

donc arctan est bornée et $N_0(\arctan) \leq \frac{\pi}{2}$. Puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$, alors $\sup\limits_{x \in \mathbb{R}} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$ ainsi

$$N_0(\arctan) = \frac{\pi}{2}$$

4. Si v est dérivable sur $I \subset \mathbb{R}$, alors $\arctan \circ v$ est dérivable sur I par composition de fonctions dérivables et, pour tout $t \in I$, on a :

$$\frac{d}{dt}[\arctan(v(t))] = \frac{v'(t)}{1 + v(t)^2}$$

5. La fonction $f : t \mapsto \arctan(t) + \arctan\left(\frac{1}{t}\right)$ est définie et $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ par composition. Pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, on a

$$f'(t) = \frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{t^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{t^2}} = 0$$

donc f est constante sur chaque intervalle du domaine de définition de f, et donc constante sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.
Puisque $f(1) = 2\arctan(1) = \frac{\pi}{2}$ et $f(-1) = 2\arctan(-1) = -\frac{\pi}{2}$ alors on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}^*, \quad \arctan(t) + \arctan\left(\frac{1}{t}\right) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & \text{si} \quad t < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si} \quad t > 0 \end{cases}$$

6. Soit $f \in E$.

6.1. Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $h_x : t \mapsto \arctan(xt).\dfrac{f(t)}{1+t^2}$ est définie et continue sur $[0, +\infty[$ par opérations élémentaires sur les fonctions continues, n a : $|h_x(t)| \leq M\frac{\pi}{2}.\dfrac{1}{1+t^2}$ donc

$$h_x(t) \underset{t \to +\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, par le théorème de comparaison la fonction h_x est aussi intégrable sur $[1, +\infty[$.
D'autre part, h_x est continue sur le segment $[0, 1]$ donc intégrable sur ce segment, ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h_x : t \mapsto \arctan(xt) \ \frac{f(t)}{1+t^2} \in L^1([0, +\infty[).$$

6.2. • Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, la fonction $x \mapsto \arctan(xt).\dfrac{f(t)}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left| \arctan(xt) \ \frac{f(t)}{1+t^2} \right| \leq \frac{M\pi}{2\,(1+t^2)}$$

posons $\varphi : t \mapsto \dfrac{M\pi}{2\,(1+t^2)}$, on a $\varphi \in L^1\left(\mathbb{R}_+\right)$.
D'après le théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre l'application

$$\Phi(f) : x \mapsto \int_0^{+\infty} \arctan(xt) \ \frac{f(t)}{1+t^2} dt$$

est continue sur $\mathbb{R}$.

- On a pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
|\Phi(f)(x)| &= \left|\int_0^{+\infty} \arctan(xt)\ \frac{f(t)}{1+t^2}dt\right| \\
&\leq \int_0^{+\infty} \left|\arctan(xt)\frac{f(t)}{1+t^2}dt\right| \\
&\leq \frac{M\pi}{2}\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} \\
&= \frac{M\pi}{2}\left[\arctan(t)\ \right]_{t=0}^{t\to+\infty} = \frac{M\pi^2}{4}
\end{aligned}$$

comme $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2} = \left[\arctan(t)\ \right]_{t=0}^{t\to+\infty} = \frac{\pi}{4}$ alors $|\Phi(f)(x)| \leq \dfrac{M\pi^2}{4}$. Ainsi $\boxed{\Phi(f) \in E}$

6.3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction arctan est impaire donc

$$\begin{aligned}
\Phi(f)(-x) &= \int_0^{+\infty} \arctan(-xt)\ \frac{f(t)}{1+t^2}dt \\
&= -\int_0^{+\infty} \arctan(xt)\ \frac{f(t)}{1+t^2}dt \\
&= -\Phi(f)(x)
\end{aligned}$$

ainsi $\boxed{\Phi(f) \text{ est impaire}}$ et on peut restreindre l'étude de Φ à l'intervalle $[0, +\infty[$.

7. D'après la question 6.2 on a $\Phi(E) \subset E$.
Soit $(f, g) \in E^2$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Puisque E est un espace vectoriel, $\lambda f + g \in E$ et donc $\Phi(\lambda f + g)$ est bien définie, d'après la question 6.1 et on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\Phi(\alpha f + \beta g)(x) &= \int_0^{+\infty} \arctan(xt)\ \frac{\alpha f(t) + \beta g(t)}{1+t^2}dt \\
&= \alpha\int_0^{+\infty} \arctan(xt)\ \frac{f(t)}{1+t^2}dt + \beta\int_0^{+\infty} \arctan(xt)\ \frac{g(t)}{1+t^2}dt \\
&= \alpha\Phi(f)(x) + \beta\Phi(g)(x)
\end{aligned}$$

Ce qui donne $\Phi(\lambda f + g) = \lambda\Phi(f) + \Phi(g)$ et donc $\boxed{\Phi \in \mathscr{L}(E)}$.

8. Par application du théorème de dérivation des fonctions définies par une intégrale à paramètre .
Soit

$$\begin{aligned}
g : [0, +\infty[\times[0, +\infty[&\to \mathbb{R} \\
(x, t) &\mapsto \arctan(xt)\ \frac{f(t)}{1+t^2}
\end{aligned}$$

- La fonction g est continue sur $[0, +\infty[\times[0, +\infty[$.
- Pour tout $x \in [0, +\infty[$, la fonction $t \mapsto g(x, t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ d'après la question **6.1** .
- Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, la fonction $x \mapsto g(x, t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ et sa dérivée $x \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x, t)$ avec :

$$\forall (x, t) \in [0, +\infty[\times[0, +\infty[, \quad \left|\frac{\partial g}{\partial x}(x, t)\right| = \frac{t}{1+x^2t^2}\frac{f(t)}{(1+t^2)}$$

- Soit $a > 0$, on a

$$\forall (x, t) \in [a, +\infty[\times[0, +\infty[, \quad \left|\frac{\partial g}{\partial x}(x, t)\right| \leq N_0(f)\frac{t}{(1+t^2)(1+a^2t^2)} = \varphi(t)$$

La fonction φ est continue sur $[0, +\infty[$ et

$$\varphi(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} N_0(f).\frac{t}{a^2t^4} \underset{t\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^3}\right)$$

Puisque $t \mapsto \dfrac{1}{t^3}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$, donc φ est intégrable sur $[0, +\infty[$.
Le théorème dérivation des fonctions définies par une intégrale à paramètre assure que $\Phi(f)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, +\infty[$.
Ceci étant valable pour tout $a > 0$, alors $\Phi(f)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et

$$\forall x \in]0, +\infty[\;\; \frac{d\Phi(f)}{dx}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{1 + x^2t^2} \frac{f(t)}{(1 + t^2)} dt$$

9. La suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers h sur $\mathbb{R}$.

9.1. Chaque h_n étant continue sur $\mathbb{R}$ et la suite $(h_n)_{n\in N}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers h , donc h est continue sur $\mathbb{R}$.

9.2. La convergence de suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers h sur $\mathbb{R}$ est équivalent à :

$$N_0\left(h - h_n\right) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

Pour $\varepsilon = 1$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq n_0 \;, N_0\left(h - h_n\right) \leq \varepsilon$$

en particulier on a $N_0\left(h - h_{n_0}\right) \leq 1$, donc $h - h_{n_0} \in E$.
Comme E est un espace vectoriel , $h - h_{n_0} \in E$ et $h_{n_0} \in E$, alors $h = h - h_{n_0} + h_{n_0} \in E$.
Ainsi $\boxed{(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } h \text{ dans } (E, N_0)}$.

10. Soit f_0 la fonction constante égale à 1 et $g = \Phi(f_0)$.

10.1. Pour tout $x > 0$, on pose

$$h_x : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \dfrac{\arctan(xt)}{1+t^2} \end{array} \right.$$

alors

$$g(x) = \Phi(f_0)(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{1 + t^2} dt = \int_0^{+\infty} h_x(t) dt$$

On pose

$$h : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \dfrac{\pi}{2}\dfrac{1}{1+t^2} \end{array} \right.$$

- Pour tout $t \in]0, +\infty[$, on a

$$\lim_{x\to+\infty} h_x(t) = \frac{\pi}{2}\frac{1}{1+t^2} = h(t)$$

- Pour tout $x > 0$ et tout $t \in]0, +\infty[$, on a $|h_x(t)| \leq h(t)$ et h est intégrable sur $]0, +\infty[$.

D'après la version aux paramètres continus du théorème de convergence dominée , on a :

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^{+\infty} h_x(t) dt = \int_0^{+\infty} h(t) dt = \frac{\pi^2}{4}$$

Ainsi $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \dfrac{\pi^2}{4}}$.

10.2. D'après le résultat de la question **8** applique à $\Phi(f_0)$, on a

$$\forall x \in]0,+\infty[\ \ , \quad g'(x) = \frac{d\Phi(f_0)}{dx}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+x^2t^2)\,(1+t^2)}dt$$

10.3. Soit $x > 0$, on a

$$g(x) + g\left(\frac{1}{x}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{1+t^2}dt + \int_0^{+\infty} \frac{\arctan\left(\frac{t}{x}\right)}{1+t^2}dt$$

le changement de variable $u = \dfrac{1}{t}$ dans la seconde intégrale donne :

$$\begin{aligned} g\left(\frac{1}{x}\right) &= -\int_{+\infty}^{0} \frac{1}{1+\frac{1}{u^2}} \arctan\left(\frac{1}{xu}\right) \frac{du}{u^2} \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u^2} \arctan\left(\frac{1}{xu}\right) du \end{aligned}$$

donc

$$g(x) + g\left(\frac{1}{x}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} \left(\arctan(xt) + \arctan\left(\frac{1}{xt}\right)\right) dt$$

d'après la question **5** on a $\arctan(xt) + \arctan\left(\dfrac{1}{xt}\right) = \dfrac{\pi}{2}$, ce qui donne

$$g(x) + g\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt = \frac{\pi^2}{4}$$

Ainsi $\boxed{\forall x > 0, \quad g(x) + g\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\pi^2}{4}}$.

10.4. Une autre expression de g'.

10.4.1. Soit $x \in]0,1[\cup]1,+\infty[$. Posons $F(T) = \dfrac{1}{(1+x^2T)\,(1+T)}$.

La fraction rationnelle F se décompose en éléments simples de la forme :

$$F_x(T) = \frac{\alpha}{1+x^2T} + \frac{\beta}{1+T}$$

avec

$$\alpha = \Big[(1+x^2T)\,F_x(T)\Big]_{T=-\frac{1}{x^2}} = \frac{x^2}{x^2-1} \ \text{ et } \ \beta = \Big[(1+T)F_x(T)\Big]_{T=-1} = -\frac{1}{x^2-1}$$

Ainsi $\boxed{\dfrac{1}{(1+x^2T)\,(1+T)} = \dfrac{1}{x^2-1}\left(\dfrac{x^2}{1+x^2T} - \dfrac{1}{1+T}\right)}$.

10.4.2. Pour tout $x \in]0,1[\cup]1,+\infty[$, il suit de **10.2** et du calcul précédent que :

$$\begin{aligned} g'(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+x^2t^2)\,(1+t^2)}dt \\ &= \int_0^{+\infty} tF(t^2)\,dt \\ &= \frac{1}{x^2-1}\int_0^{+\infty} \left(\frac{x^2t}{1+x^2t^2} - \frac{t}{1+t^2}\right) dt \end{aligned}$$

Soit $A > 0$ on a

$$\begin{aligned} \int_0^{A} \left(\frac{x^2t}{1+x^2t^2} - \frac{t}{1+t^2}\right) dt &= \frac{1}{2}\int_0^{A} \frac{2x^2t}{1+x^2t^2} - \frac{2t}{1+t^2}dt \\ &= \frac{1}{2}\left[\ln\left|\frac{1+x^2t^2}{1+t^2}\right|\right]_0^A \end{aligned}$$

et on fait tendre $A \to +\infty$

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{x^2 t}{1+x^2t^2} - \frac{t}{1+t^2} \right) dt = \ln(x)$$

Ainsi $\boxed{\forall x \in]0,1[\cup]1,+\infty[, \quad g'(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^2-1}}$.

10.4.3. D'après la question **8** on a $g = \Phi(f_0) \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ donc

$$g'(1) = \lim_{x\to 1} g'(x) = \lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{u\to 0} \frac{\ln(1+u)}{u(2+u)} = \frac{1}{2}.$$

par suite

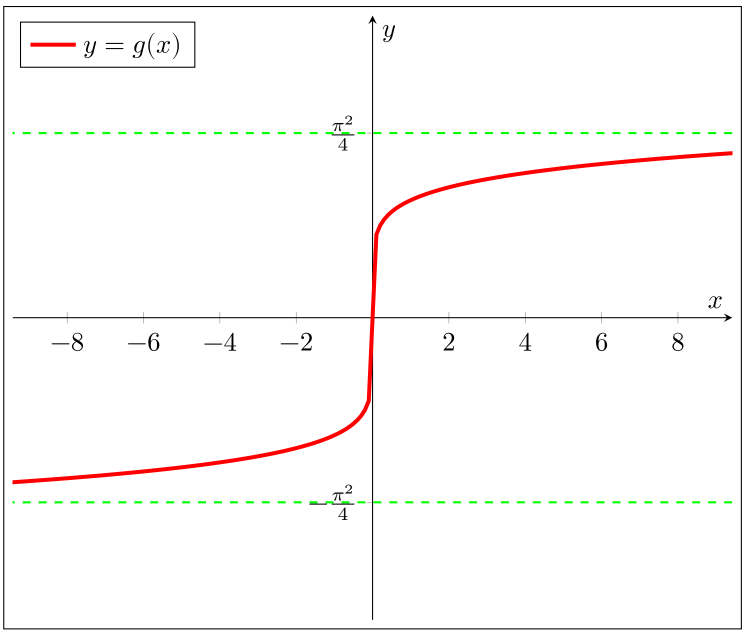
$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad g'(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(x)}{x^2-1} & \text{si} \quad x \neq 1 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}$$

10.5. • Si $x \in]0,1[$, $\ln(x) < 0$ et $x^2 - 1 < 0$ donc $g'(x) > 0$.

Si $x \in]1,+\infty[$, $\ln(x) > 0$ et $x^2 - 1 > 0$ donc $g'(x) > 0$.

• On a $g(0) = 0$ et d'après la question 10.1 $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \frac{\pi^2}{4}$. Puisque $\lim\limits_{x\to 0} g'(x) = +\infty$, la courbe représentative de g admet une tangente verticale au point d'abscisse 0 établie à la qet g est impaire , on en déduit le tableau de variations et la courbe représentative de g :

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$g(x)$		$+$	‖	$+$	
$g'(x)$	$-\frac{\pi^2}{4}$	$-\frac{\pi^2}{8}$	0	$\frac{\pi^2}{8}$	$\frac{\pi^2}{4}$



Exercice 2

1. L'intégrale d'une fonction à valeurs complexes est définit par :

$$\int_0^{2\pi} f(t)dt = \int_0^{2\pi} \mathrm{Re}(f)(t)dt + i\int_0^{2\pi} \mathrm{Im}(f)(t)dt$$

puisque$\overline{f} = \mathrm{Re}(f) - i\,\mathrm{Im}(f)$ alors :

$$\int_0^{2\pi} \overline{f(t)}dt = \int_0^{2\pi} \mathrm{Re}(f)(t)dt - i\int_0^{2\pi} \mathrm{Im}(f)(t)dt = \overline{\int_0^{2\pi} f(t)dt}$$

2. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Si P s'annule en tout point de $\mathbb{U}$, alors P admet une infinité de racines distinctes, donc il est nul.

3. • Si $z \in \mathbb{U}$, alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = \mathrm{e}^{i\theta}$ et

$$\bar{z} = \mathrm{e}^{-i\theta} = \frac{1}{\mathrm{e}^{i\theta}} = \frac{1}{z}.$$

• Réciproquement, si $\bar{z} = \frac{1}{z}$, alors $1 = \bar{z}z = |z|^2$ donc $|z| = 1$ et $z \in \mathbb{U}$.

Ainsi, on a $\boxed{z \in \mathbb{U} \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{1}{z}}$

4. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $P = 1 + iX$. On a

$$\begin{aligned} \overline{P(\mathrm{e}^{i\theta})} &= \overline{1 + i\mathrm{e}^{i\theta}} \\ &= 1 - i\mathrm{e}^{-i\theta} \\ &= 1 - i(\cos(\theta) - i\sin(\theta)) \\ &= 1 - \sin(\theta)) - i\cos(\theta) \end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\overline{P(\mathrm{e}^{i\theta})} = (1 - \sin(\theta)) - i\cos(\theta)}$.

5. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

• Méthode 1 : Le polynôme caractéristique χ_A de A est scindé dans $\mathbb{C}[X]$, il s'écrit donc $\chi_A(X) = \prod_{k=1}^{n}(X - \lambda_k)$,
où les λ_k sont les valeurs propres de A comptées avec leurs multiplicités.
On sait que

$$\chi_A(X) = X^n - t\,\mathrm{tr}(A)X^{n-1} + ... + (-1)^n \ \det(A)$$

les relations entre les coefficients et les racines donne alors $\boxed{\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i}$.

• Méthode 2 : Le polynôme caractéristique χ_A de A est scindé dans $\mathbb{C}[X]$ donc A est trigonalisable dans $\mathbb{C}[X]$.
Il existe donc $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que

$$P^{-1}AP = T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & t_{1,2} & \cdots & t_{1,n} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & t_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Puisque la trace est invariante par conjugaison, alors $\boxed{\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(T) = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i}$.

6.

6.1. Soit $(k,\ell) \in [\![0,n]\!]^2$. On a

$$\varphi\left(X^k, X^\ell\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-k\theta}\mathrm{e}^{i\ell\theta}d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{j(\ell-k)\theta}d\theta = \delta_{k,\ell}$$

donc où δ, désigne le symbole de Kronecker, ainsi $\boxed{\forall (k,\ell) \in [\![0,n]\!]^2, \quad \varphi\left(X^k, X^\ell\right) = \delta_{k,\ell}}$.

6.2. Soit $a \in \mathbb{C}$ et $P, Q, R \in E_n$.

-

$$\begin{aligned}
\varphi(aP+Q,R) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{aP(\mathrm{e}^{i\theta}) + Q\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)}R\left(\mathrm{e}^{j\theta}\right)d\theta \\
&= \tfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \bar{a}\overline{P(\mathrm{e}^{i\theta})}\ R\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right) + \overline{Q\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)}R\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)d\theta \\
&= \bar{a}\varphi(P,R) + \varphi(Q,R)
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\varphi(aP+Q,R) = \bar{a}\varphi(P,R) + \varphi(Q,R)}$.

-

$$\begin{aligned}
\varphi(P,aQ+R) &= \tfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(\mathrm{e}^{i\theta})\,\overline{aQ\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)R\left(\mathrm{e}^{j\theta}\right)}\ d\theta \\
&= \tfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \bar{a}\ P(\mathrm{e}^{i\theta})\,\overline{Q\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)}\ + P(\mathrm{e}^{i\theta})\,\overline{R\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)}d\theta \\
&= \bar{a}\varphi(P,Q) + \varphi(P,R)
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\varphi(P,aQ+R) = \bar{a}\varphi(P,Q) + \varphi(P,R)}$.

-

$$\begin{aligned}
\varphi(P,Q) &= \tfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{P(\mathrm{e}^{i\theta})}Q\left(\mathrm{e}^{j\theta}\right)d\theta \\
&= \tfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{P(\mathrm{e}^{j\theta})\,\overline{Q\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)}}d\theta \\
&= \overline{\tfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(\mathrm{e}^{j\theta})\,\overline{Q\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)}d\theta}\ = \overline{\varphi(Q,P)}
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\varphi(P,Q) = \overline{\varphi(Q,P)}}$.

6.3. Soit $P \in E_n$. On a

$$\varphi(P,P) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|P(\mathrm{e}^{i\theta})\right|^2 d\theta$$

et pour tout $\theta \in [0,2\pi]\,, \left|P(\mathrm{e}^{i\theta})\right|^2 \geq 0$, donc $\boxed{\forall P \in E_n, \quad \varphi(P,P) \in \mathbb{R}_+}$.

6.4. Soit $P \in E_n$. Si P est nul, on a évidemment $\varphi(P,P) = 0$.

Réciproquement, si $\varphi(P,P) = 0$, alors $\displaystyle\int_0^{2\pi} \left|P(\mathrm{e}^{i\theta})\right|^2 d\theta = 0$. Puisque la fonction , $\theta \mapsto \left|P(\mathrm{e}^{i\theta})\right|^2$ est continue et positive sur $[0,2\pi]$, alors $P(\mathrm{e}^{i\theta}) = 0$ pour tout $\theta \in [0,2\pi]$. Par suite P s'annule sur $\mathbb{U}$, d'après la question 3, P est le polynôme nul.

Ainsi $\boxed{\forall P \in E_n, \quad \varphi(P,P) = 0 \Leftrightarrow P = 0_{\mathbb{C}[X]}}$.

Les propriétés des questions **6.3** *et* **6.4** *permettent de dire que φ est une forme hermitienne définie positive sur E_n; elle définit ce qu'on peut appeler un produit scalaire complexe sur cet espace .*

6.5. On note $Q_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $a_n = 1$ et $M = \sup_{z \in \mathbb{U}} |Q_0(z)|^2$.

6.5.1. D'après les questions **6.1** et **6.2** , on a :

$$\begin{aligned} \varphi(Q_0, Q_0) &= \varphi\left(\sum_{k=0}^{n} a_k X^k, \sum_{\ell=0}^{n} a_\ell X^\ell\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k}\, \varphi\left(X^k, \sum_{\ell=0}^{n} a_\ell X^\ell\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \sum_{\ell=0}^{n} \overline{a_k} a_\ell \varphi\left(X^k, X^\ell\right) \end{aligned}$$

or $\varphi\left(X^k, X^\ell\right) = \delta_{k,\ell}$ donc

$$\varphi(Q_0, Q_0) = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k} a_k = \sum_{k=0}^{n} |a_k|^2 = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|^2$$

Ainsi $\boxed{\varphi(Q_0, Q_0) = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|^2}$.

6.5.2. D'une part, on a $= 1 + \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|^2 \geq 1$, d'autre part

$$\varphi(Q_0, Q_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left|Q_0\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)\right|^2 d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M d\theta = M$$

Ainsi, $1 \leq \varphi(Q_0, Q_0) \leq M$ et $\boxed{M \geq 1}$.

6.5.3. Soit $Q_0 = X^n$, pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$, on a $\left|Q_0\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)\right|^2 = \left|\mathrm{e}^{in\theta}\right|^2 = 1$ donc $M = 1$.

Réciproquement, supposons $M = 1$, puisque $\varphi(Q_0, Q_0) \leq M$ et $\varphi(Q_0, Q_0) \geq 1$ donc $\varphi(Q_0, Q_0) = 1$.

Ce qui donne

$$\varphi(Q_0, Q_0) = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|^2 = 1$$

et

$$\sum_{k=0}^{n-1} |a_k|^2 = 0$$

donc, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $a_k = 0$. Autrement dit, $Q_0 = X^n$.

Ainsi $\boxed{M = 1 \Leftrightarrow Q_0 = X^n}$.

Exercice 3

Dans cet exercice posons pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, Y_k la variable aléatoire discrète qui donne le numéro de la case dans laquelle tombe la k-ième boule lancée.

Les $(Y_k)_{k \in [\![1,n]\!]}$ suivent la loi uniforme $\mathscr{U}([\![1, N]\!])$ et elles sont mutuellement indépendantes .

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite vérifiant : $u_{n+1} = a u_n + b$ où $a \in \mathbb{R} \backslash \{1\}$ et $b \in \mathbb{R}$.

1.1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est arithmético-géométrique de raison géométrique $a \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ et arithmétique b.

- On cherche une solution constante : soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha = a\alpha + b$ donc $\alpha = \dfrac{b}{1-a}$.
- Soit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $v_n = u_n - \alpha$, elle verifie $v_{n+1} = av_n \ \forall n \in \mathbb{N}^*$, elle est donc géométrique de raison a , par suite

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = a^{n-1}v_1$$

d'où $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = a^{n-1}\left(u_1 - \dfrac{b}{1-a}\right) + \dfrac{b}{1-a}}$.

1.2. De l'expression précédente on distingue les cas suivants :

- si $u_1 = \dfrac{b}{1-a}$, alors la suite (u_n) est constante;
- si $a \in]-1,1[$, la suite $(a^{n-1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0 donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\dfrac{b}{1-a}$;
- si $a \in \mathbb{R}\backslash]-1,1]$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge.

2. Au minimum, $T_n = 1$ si toutes les boules tombent dans la même case. Deux cas se présentent :

- Si $n \geq N$, toutes les cases peuvent être occupées donc $T_n(\Omega) = [\![1, N]\!]$.
- Si $n \leq N$, au minimum une case est occupée et au maximum n cases le sont, dans ce cas, $T_n(\Omega) = [\![1, n]\!]$.

Ainsi $\boxed{T_n(\Omega) = [\![1, \min(n, N)]\!]}$.

3.

- Loi de T_1 : si $n = 1$, donc $T_1(\Omega) = \{1\}$ ainsi $T_1 = 1$, c'est la variable aléatoire certaine .
- Loi de T_1 : si $n = 2$, on lance deux boules , qui vont occuper une ou deux cases.

L'événement $(T_2 = 1)$ est réalisé quand les deux boules tombent sur une même case. Une fois connu la case de la première boule la probabilité que la deuxième boule tombe dans cette case est $\dfrac{1}{N}$ donc $\mathbb{P}(T_2 = 1) = \dfrac{1}{N}$ par conséquent $\mathbb{P}(T_2 = 2) = 1 - \mathbb{P}(T_2 = 1) = 1 - \dfrac{1}{N}$.

Ainsi la loi de T_2 est donnée par : $\boxed{T_2(\Omega) = \{1, 2\} \ , \mathbb{P}(T_2 = 1) = \dfrac{1}{N} \ \text{ et } \mathbb{P}(T_2 = 2) = \dfrac{N-1}{N}}$.

Autre méthode : On a

$$(T_2 = 1) = \bigcup_{k=1}^{N} (Y_1 = k, Y_2 = k)$$

Par σ-additivité et indépendance des Y_k on a :

$$\mathbb{P}(T_2 = 1) = \sum_{k=1}^{N} \mathbb{P}(Y_1 = k)\,\mathbb{P}(Y_2 = k) = \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{1}{N}\right)^2 = \frac{1}{N}$$

d'où le résultat et

$$\mathbb{P}(T_2 = 2) = 1 - \frac{1}{N} = \frac{N-1}{N}$$

On remarque que ce résultat englobe le cas $N = 1$.

4. • Exprimons événement $(T_n = 1)$ à l'aide des variables aléatoires Y_k , l'événement $(T_n = 1)$ se réalise si toutes les boules tombent dans la même case donc ,

$$(T_n = 1) = \bigcup_{k=1}^{N} \left[\bigcap_{i=1}^{n} (Y_i = k)\right]$$

les événements $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} (Y_i = k)$ sont disjoints donc

$$\mathbb{P}(T_n = 1) = \sum_{k=1}^{N} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} (Y_i = k)\right)$$

par l'indépendance des Y_k on a

$$\mathbb{P}(T_n = 1) = \sum_{k=1}^{N} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}((Y_i = k)) = \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{1}{N}\right)^n = \frac{1}{N^{n-1}}$$

Ainsi $\boxed{\mathbb{P}(T_n = 1) = \frac{1}{N^{n-1}}}$.

- L'événement $(T_n = 2)$ se réalise si toutes les boules tombent dans deux cases différentes.

Pour construire $(T_n = 2)$ on prend une partie à deux éléments $\{i, j\} \subset [\![1, N]\!]$ et une partie $A \subset [\![1, n]\!]$ telle que $A \neq \emptyset$ et $A \neq [\![1, n]\!]$ de sorte que lors des lancers d'indice $k \in A$ la boule tombe dans la case i , bien sur la boule tombe dans la case j sinon .

On a donc

$$(T_n = 2) = \bigcup_{\{i,j\} \subset [\![1,N]\!]} \left(\bigcup_{\substack{A \subset [\![1,n]\!] \\ A \neq \emptyset \\ A \neq [\![1,n]\!]}} \left[\left(\bigcap_{k \in A} (Y_k = i) \right) \cap \left(\bigcap_{k \in \overline{A}} (Y_k = j) \right) \right] \right)$$

les événements considérés sont disjoints et les Y_k sont indépendantes , ce qui donne

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T_n = 2) &= \sum_{\{i,j\} \subset [\![1,N]\!]} \left(\sum_{\substack{A \subset [\![1,n]\!] \\ A \neq \emptyset \\ A \neq [\![1,n]\!]}} \left[\left(\prod_{k \in A} \mathbb{P}(Y_k = i) \right) \left(\prod_{k \in \overline{A}} \mathbb{P}(Y_k = j) \right) \right] \right) \\
&= \sum_{\{i,j\} \subset [\![1,N]\!]} \left(\sum_{\substack{A \subset [\![1,n]\!] \\ A \neq \emptyset \\ A \neq [\![1,n]\!]}} \left[\left(\frac{1}{N}\right)^{\mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(\overline{A})} \right] \right) \\
&= \left(\frac{1}{N}\right)^n \mathrm{Card}\left\{ \{i, j\} \subset [\![1, N]\!] \right\} \mathrm{Card}\left\{ A \subset [\![1, n]\!], A \neq \emptyset, A \neq [\![1, n]\!] \right\}
\end{aligned}$$

On sait que

$$\mathrm{Card}\left\{ \{i, j\} \subset [\![1, N]\!] \right\} = \binom{n}{2}$$

et

$$\mathrm{Card}\left\{ A \subset [\![1, n]\!], A \neq \emptyset, A \neq [\![1, n]\!] \right\} = 2^n - 2$$

d'où $\boxed{\mathbb{P}(T_n = 2) = \binom{n}{2} \frac{2^n - 2}{N^n}}$.

Ainsi $\boxed{\mathbb{P}(T_n = 1) = \frac{1}{N^{n-1}} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(T_n = 2) = \binom{n}{2} \frac{2^n - 2}{N^n}}$.

5. • Si $n > N$, l'événement $(T_n = n)$ est impossible car il ne peut y avoir plus de N cases occupées , donc $\mathbb{P}(T_n = n) = 0$.

- Si $n \leq N$, l'événement $(T_n = n)$ se réalise si, et seulement si les n boules tombent dans des cases distinctes.

Pour construire $(T_n = n)$ on prend une partie à n éléments $A \subset [\![1, N]\!]$, c'est l'ensemble des numéros des n cases où les n boules tombent , mais il faut tenir compte de l'ordre d'apparition de ces numéros , pour cela consdérons $S(A)$ l'ensemble de tous les $n-$uplets d'éléments de A . On a donc :

$$(T_n = n) = \bigcup_{\substack{A \subset [\![1,N]\!] \\ \mathrm{Card}\, A = n}} \left(\bigcup_{(a_1, \ldots, a_n) \in S(A)} \left(\bigcap_{k=1}^{n} (Y_k = a_k) \right) \right)$$

le même raisonnement que précédement donne

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(T_n=n\right) &= \sum_{\substack{A\subset [\![1,N]\!] \\ \operatorname{Card} A=n}} \left(\sum_{(a_1,\dots,a_n)\in S(A)} \left(\prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left(Y_k=a_k\right)\right)\right) \\
&= \frac{1}{N^n} \operatorname{Card}\left\{A\subset [\![1,n]\!], \operatorname{Card} A=n\right\}. \operatorname{Card} S(A)
\end{aligned}$$

on sait que

$$\operatorname{Card}\left\{A\subset [\![1,n]\!], \operatorname{Card} A=n\right\} = \binom{N}{n}$$

et

$$\operatorname{Card} S(A) = n!$$

donc

$$\mathbb{P}\left(T_n=n\right) = \binom{N}{n} n! \frac{1}{N^n} = \frac{N!}{N^n (N-n)!}$$

Ainsi $\boxed{\mathbb{P}\left(T_n=n\right) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n>N \\ \dfrac{N!}{N^n(N-n)!} & \text{si} \quad n\leq N \end{cases}}$

6. La famille $\left(T_n=i\right)_{1\leq i\leq \min(N,n)}$ est un système complet d'événements .
Soit $k\in [\![1,n]\!]$, la formule de probabilité totale donne

$$\mathbb{P}\left(T_{n+1}=k\right) = \sum_{i=1}^{\min(N,n)} \mathbb{P}_{\left(T_n=i\right)}\left(T_{n+1}=k\right) \mathbb{P}\left(T_n=i\right)$$

D'une part on a, pour tout $i\in [\![1,\min(N,n)]\!]$, si $\left(T_n=i\right)$ est réalisé alors soit $\left(T_{n+1}=i\right)$ soit $\left(T_{n-1}=i+1\right)$ est réalisé , donc pour $k\neq i$ et $k\neq i+1$ on a $\mathbb{P}_{\left(T_n=i\right)}\left(T_{n+1}=k\right)=0$, par suite

$$\mathbb{P}\left(T_{n+1}=k\right) = \mathbb{P}_{\left(T_n=k\right)}\left(T_{n+1}=k\right)\mathbb{P}\left(T_n=k\right) + \mathbb{P}_{\left(T_n=k-1\right)}\left(T_{n+1}=k\right)\mathbb{P}\left(T_n=k-1\right)$$

et d'autre part :

- Si $\left(T_n=k\right)$ est réalisé, k cases sont occupées donc la probabilité que la ($n+1$)-ième boule tombe dans l'une des cases déjà occupées est $\dfrac{k}{N}$, donc $\mathbb{P}_{\left(T_n=k\right)}\left(T_{n+1}=k\right)=\dfrac{k}{N}$.
- Si $\left(T_n=k-1\right)$ est réalisé, $k-1$ cases sont occupées donc la probabilité que la $(n+1)$-ième boule tombe dans une cases non occupée est $\dfrac{N-(k-1)}{N}$, donc $\mathbb{P}_{\left(T_n=k-1\right)}\left(T_{n+1}=k\right)=\dfrac{N-k+1}{N}$.

Ainsi $\boxed{\forall k\in [\![1,n]\!], \quad \mathbb{P}\left(T_{n+1}=k\right) = \frac{k}{N}\mathbb{P}\left(T_n=k\right) + \frac{N-k+1}{N}\mathbb{P}\left(T_n=k-1\right)}$.

6.1. On a $\mathbb{P}\left(T_n=0\right)=0$ et $\mathbb{P}\left(T_n=k\right)=0$ pour tout $k>n$, donc pour tout $x\in\mathbb{R}$

$$G_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left(T_n=k\right) x^k$$

6.2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, en utilisant l'identité établie en 6 , on obtient

$$\begin{aligned}
G_{n+1}(x) &= \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}\left(T_{n+1}=k\right) x^k \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{k}{N}\mathbb{P}\left(T_n=k\right)+\frac{N-k+1}{N}\mathbb{P}\left(T_n=k-1\right)\right) x^k \\
&= \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{n+1} k\mathbb{P}\left(T_n=k\right) x^k+\sum_{k=1}^{n+1}\mathbb{P}\left(T_n=k-1\right) x^k-\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{n+1}(k-1)\mathbb{P}\left(T_n=k-1\right) x^k \\
&= \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}\left(T_n=k\right) x^k+\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}\left(T_n=k\right) x^{k+1}-\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}\left(T_n=k\right) x^{k+1} \\
&= \frac{x}{N}G_n'(x)+xG_n(x)-\frac{x^2}{N}G_n'(x).
\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad G_{n+1}(x)=\frac{1}{N}\left(x-x^2\right)G_n'(x)+xG_n(x)}$.

6.3. Les séries génératrices impliquées étant polynomiales, elles sont $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$G_{n+1}'(x)=\frac{1}{N}(1-2x)G_n'(x)+\frac{1}{N}\left(x-x^2\right)G_n''(x)+G_n(x)+xG_n'(x)$$

donc, en évaluant en 1, il vient :

$$G_{n+1}'(1)=-\frac{1}{N}G_n'(1)+G_n(1)+G_n'(1)$$

on sait que $G_n(1)=1, G_n'(1)=\mathbb{E}\left[T_n\right]$ et $G_{n+1}'(1)=\mathbb{E}\left[T_{n+1}\right]$ donc : $\boxed{\mathbb{E}\left[T_{n+1}\right]=\left(1-\frac{1}{N}\right)\mathbb{E}\left[T_n\right]+1}$.

6.4. La suite $\left(\mathbb{E}\left[T_n\right]\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est arithmético-géométrique de raison géométrique $a=\left(1-\frac{1}{N}\right)$ et de raison arithmétique $b=1$ donc $\dfrac{b}{1-a}=N$, d'après la question 1, on a :

$$\mathbb{E}\left[T_n\right]=\left(\frac{N-1}{N}\right)^{n-1}\left(\mathbb{E}\left[T_1\right]-N\right)+N$$

Puisque $\mathbb{E}\left[T_1\right]=1$, alors

$$\mathbb{E}\left[T_n\right]=\left(\frac{N-1}{N}\right)^{n-1}(1-N)+N=N\left(1-\left(\frac{N-1}{N}\right)^n\right)$$

Ainsi $\boxed{\forall n \in N^*, \quad \mathbb{E}\left[T_n\right]=N\left(1-\left(\frac{N-1}{N}\right)^n\right)}$.

Puisque $\left|\dfrac{N-1}{N}\right|<1$, on a : $\boxed{\lim_{n\to+\infty}\mathbb{E}\left[T_n\right]=N}$.

6.5. Si on note X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si la case numéro i est pleine voir "non vide" après n lancers et 0 sinon, le nombre de cases non vides est

$$T_n=\sum_{i=1}^N X_i$$

On a $X_i(\Omega)=\{0,1\}$ donc X_i est une variable aléatoire de Bernoulli. Déterminons son paramètre.
L'événement $(X_i=0)$ se réalise si, et seulement si, toutes les boules tombent dans des cases aux numéros autres que i donc ,

$$(X_i=0)=\bigcap_{k=1}^n (Y_k \neq i)=\bigcap_{k=1}^n \overline{(Y_k=i)}$$

L'indépendance des Y_k donne

$$\mathbb{P}\left(X_i=0\right)=\prod_{k=1}^n \mathbb{P}\left(\overline{(Y_k=i)}\right)=\prod_{k=1}^n\left(1-\frac{1}{N}\right)=\left(\frac{N-1}{N}\right)^n$$

Ainsi $\boxed{\forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket, \quad X_i \sim \mathscr{B}\left(1-\left(\frac{N-1}{N}\right)^n\right)}$

Par suite $\boxed{\forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket, \quad \mathbb{E}\left[X_i\right]=1-\left(\frac{N-1}{N}\right)^n}$

Par linéarité de l'espérance, on a

$$\mathbb{E}\left[T_n\right]=\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^N X_i\right]=\sum_{i=1}^N \mathbb{E}\left[X_i\right]=\sum_{i=1}^N\left(1-\left(\frac{N-1}{N}\right)^n\right)$$

donc

$$\mathbb{E}\left[T_n\right]=N\left(1-\left(\frac{N-1}{N}\right)^n\right)$$

Exercice 4

1. Les matrices

$$0_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J_3=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

sont équitables.

2. Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$. Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est équitable, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $a_{i,j}=a_{i,k} a_{k,j}$.
Et si $-A$ est équitable, alors

$$-a_{i,j}=\left(-a_{i,k}\right)\left(-a_{k,j}\right)=a_{i,k} a_{k,j}=a_{i,j}$$

ainsi, $a_{i,j}=0$. Ceci étant valable pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, donc $A=0_n$.
Puisque 0_n est une matrice équitable, on peut conclure :
$\boxed{\forall A \in \mathscr{M}_n(K)\text{ , } A \text{ et } -A \text{ sont équitables si et seulement si } A=0.}$

3. Soit $A \in \mathscr{M}_n(K)$ équitable. Notons $A=\left(a_{i,j}\right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ et $A^{\top}=\left(b_{i,j}\right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ avec $b_{i,j}=a_{j,i}$ pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket$.
Soit $(i, j, k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^3$, on a :

$$b_{i,j}=a_{j,i}=a_{j,k} a_{k,i}=b_{k,j} b_{i,k}=b_{i,k} b_{k,j}$$

donc la matrice $A^{\top}$ est équitable.
Ainsi $\boxed{A \text{ équitable} \Leftrightarrow A^{\top}\text{équitable}}$.

4. Soit $A \in \mathscr{M}_n(K)$ équitable. Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, on a :

$$a_{i,i}=a_{i,j} a_{j,i}=a_{j,i} a_{i,j}=a_{j,j}$$

Ainsi $\boxed{\text{A équitable} \Rightarrow \forall(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, a_{i,i}=a_{j,j}}$

5. Soit A équitable non nulle et $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.
En prenant $i=j=k$ dans la relation de définition d'une matrice équitable, on a :

$$a_{k,k}=a_{kk} a_{k,k}=a_{k,k}^2$$

donc $a_{k,k} \in \{0,1\}$.
Si il existe $k \in [\![1,n]\!]$ tel que $a_{k,k} = 0$, alors, d'après la question 4, A est à diagonale nulle.
Ce qui donne, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$:

$$a_{i,j} = a_{i,i}a_{i,j} = 0$$

donc A est la matrice nulle, contradiction.
Ainsi $\boxed{\forall i \in [\![1,n]\!], \quad a_{i,i} = 1}$.

6. Soit B équitable non nulle. D'après la question 5, comme A est équitable non nulle, les coefficients diagonaux de A et de B sont égaux à 1 .
Mais les coefficients diagonaux de $A+B$ sont égaux à 2 , donc $A+B$ ne peut pas être équitable.
Ainsi : la somme de deux matrices équitables non nulles n'est pas équitable.

7. Si il existe $(i,j) \in [\![1,n]\!]$ tel que $a_{i,j} = 0$, alors

$$a_{i,i} = a_{i,j}a_{ji} = 0,$$

ce qui contredit le résultat établi en 5.
Ainsi $\boxed{\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad a_{i,j} \neq 0}$.

8. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.
On a :

$$a_{i,j} = a_{i,1}a_{1,j}$$

et

$$a_{1,j}a_{j,1} = a_{1,1} = 1$$

d'après la question la question **7** $a_{j,1} \neq 0$ donc $a_{1,j} = \dfrac{1}{a_{j,1}}$, ainsi $\boxed{\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad a_{i,j} = \dfrac{a_{i,1}}{a_{j,1}}}$.

9. Quelques résultats remarquables .

9.1. Soiy $j \in [\![1,n]\!]$, d'après la question **8** la j ième colonne de A s'écrit

$$C_j = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{a_{1,1}}{a_{j,1}} \\ \dfrac{a_{2,1}}{a_{j,1}} \\ \vdots \\ \dfrac{a_{n,1}}{a_{j,1}} \end{pmatrix} = \frac{1}{a_{j,1}} \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{n,1} \end{pmatrix} = \frac{1}{a_{j,1}} C_1$$

A est non nulle donc forcement $C_1 \neq 0$, par suite

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}\left(C_1, C_2, \dots, C_n\right) = \mathrm{rg}\left(C_1\right) = 1$$

Ainsi $\boxed{\mathrm{rg}(A) = 1}$.
Remarque : *on peut exprimer donc les matrices équitables de tailles 2* 2 *et* 3 *sous la forme :*

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 1/a & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & a & ab \\ 1/a & 1 & b \\ 1/ab & 1/b & 1 \end{pmatrix} \text{ avec } ab \neq 0$$

9.2. Posons $A^2 = (c_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}}$. Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]$, on a :

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}a_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,j} = na_{i,j}$$

donc $\boxed{A^2 = nA}$.

9.3. La relation précédente montre que le polynôme $X^2 - nX = X(X-n)$ est annulateur et A il est scindé à racines simples, donc A est diagonalisable.

9.4. Comme $X(X-n)$ annule A, alors $\mathrm{Sp}(A) \subset \{0,n\}$. Soit $p \in [\![0,n]\!]$ la multiplicité de la valeur propre 0 , donc la multiplicité de la valeur propre n est $n-p$.

On sait que

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{\lambda\in \mathrm{Sp}(A)} \lambda = \sum_{k=1}^{n} a_{k,k}$$

or $a_{k,k} = 1$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$ donc

$$\mathrm{tr}(A) = p \times 0 + (n-p) \times n = n$$

ainsi $p = n-1$ et $\boxed{A \text{ est semblable à } \mathrm{Diag}(n, 0, \ldots, 0)}$.

9.5. Soit A une matrice équitable . Notons J la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1 .

On a $J^2 = nJ$ donc $X(X-n)$ annule J. Il s'ensuit que J est diagonalisable, $\mathrm{Sp}(J) \subset \{0,n\}$.

Comme $\mathrm{tr}(A) = n$ alors , comme dans la question **9.4,** la multiplicité de 0 est $n-1$ et la multiplicité de n est 1 .

Donc J semblable à $\mathrm{Diag}(n, 0, \ldots, 0)$. Par transitivité A est semblable à J.

10. Si A est symétrique, alors pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on a :

$$1 = a_{i,i} = a_{i,j}a_{ji} = a_{i,j}^2$$

donc $a_{i,j} \in \{-1, 1\}$.

Réciproquement, supposons que A est symétrique et tous ces coefficients sont dans $\{-1,1\}$.

Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. Puisque $a_{i,j}a_{ji} = a_{i,i} = 1$, alors $a_{i,j}$ et a_{ji} sont de même signe, et donc égaux.

Ainsi $\boxed{A \in S_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, a_{i,j} \in \{-1,1\}}$.

11. Soit A équitable symétrique non nulle. Donc ses coefficients sont dans $\{-1, 1\}$.

- D'après la question **9.1** on a $\mathrm{rg}(A) = 1$ et

$$\forall (j \in [\![1,n]\!] \, , C_j = \frac{1}{a_{j,1}} C_1 = a_{j,1} C_1$$

chaque colonne est égale à la première ou à son opposé.

La matrice A est entièrement déterminée par la première colonne C_1. Puisque le coefficient $a_{1,1}$ est égal à 1 , on a 2^{n-1} choix pour les autres coefficients de C_1 et donc au plus 2^{n-1} choix pour A.

- Réciproquement : supposons que $C_1 = {}^{\top}(a_{1,1}, a_{2,1}, \ldots, a_{n,1})$ est fixée dans $\{-1,1\}^n$, avec $a_{1,1} = 1$.

Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]$, on pose $a_{i,j} = \dfrac{a_{i,1}}{a_{j,1}} \in \{-1,1\}$, alors, pour tout $(i,j,k) \in [\![1,n]\!]^3$

$$a_{i,k}a_{k,j} = \frac{a_{i,1}}{a_{k,1}} \frac{a_{k,1}}{a_{j,1}} = \frac{a_{i,1}}{a_{j,1}} = a_{i,j}$$

donc la matrice A ainsi construite est équitable non nulle à coefficients dans $\{-1,1\}$; elle est donc symétrique.

Conclusion : Il existe 2^{n-1} matrices équitables symétriques non nulles.

12. Soit G un sous-groupe fini de cardinal q de $(\mathbb{K}^*, .)$.
Une matrice équitable à coefficients dans G est de rang 1 et entièrement déterminée par sa première colonne, dont le premier coefficient est 1, le même raisonnement que celui effectué à la question 11 montre qu'il existe q^{n-1} matrices équitables à coefficients dans G.

13. On a $\mathbb{U}_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid z^2 = 1\} = \{-1, 1\}$, il y a $2^{2-1} = 2$ matrices de taille 2 à coefficients dans $\mathbb{U}_2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

De même $\mathbb{U}_3 = \{z \in \mathbb{C} \mid z^3 = 1\} = \{1, j, \overline{j}\}$, de la remarque 9.a les matrices équitables de taille 3 à coefficients dans $\mathbb{U}_3$ sont :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \overline{j} \\ 1 & 1 & \overline{j} \\ j & j & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & j \\ 1 & 1 & j \\ \overline{j} & \overline{j} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \overline{j} & \overline{j} \\ j & 1 & 1 \\ j & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & j & j \\ \overline{j} & 1 & 1 \\ \overline{j} & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \overline{j} & 1 \\ j & 1 & j \\ 1 & \overline{j} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & j & 1 \\ \overline{j} & 1 & \overline{j} \\ 1 & j & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \overline{j} & j \\ j & 1 & \overline{j} \\ \overline{j} & j & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & j & \overline{j} \\ \overline{j} & 1 & j \\ j & \overline{j} & 1 \end{pmatrix}$$