

E3A POLYTHECH
CORRIGÉ DE MATHÉMATIQUES

Session 2024 - Filière MP

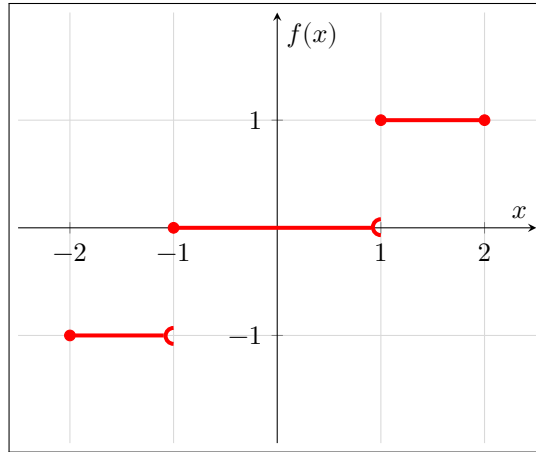
m.laamoum2@gmail.com ¹

Exercice 1

1. Soit $f : x \mapsto \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor$. On a

$$\begin{aligned} \left(\left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor = k \right) &\Leftrightarrow k \leq \frac{x+1}{2} < k+1 \\ &\Leftrightarrow 2k-1 \leq x < 2k+1 \end{aligned}$$

La représentation graphique de f sur $[-2, 2]$ est :



2. $X \sim \mathcal{G}(p)$ donc $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et

$$Y(\Omega) = \left\{ \left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor \mid k \in \mathbb{N}^* \right\}$$

Si $k \in \mathbb{N}^*$ alors

$$\left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor = \begin{cases} p & \text{si } k = 2p \\ p+1 & \text{si } k = 2p+1 \end{cases}$$

Ainsi

$$Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$$

3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} (Y = k) &= \left(\left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor = k \right) \\ &= \left(k \leq \frac{X+1}{2} < k+1 \right) \\ &= (2k-1 \leq X < 2k+1) \\ &= (X = 2k-1) \cup (X = 2k) \end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, (Y = k) = (X = 2k-1) \cup (X = 2k)}$

¹<https://tinyurl.com/2qyzrbd>

4. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, Les deux événements $(X = 2k - 1)$ et $(X = 2k)$ sont disjoints donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y = k) &= \mathbb{P}(X = 2k - 1) + \mathbb{P}(X = 2k) \\ &= pq^{2k-2} + pq^{2k-1} \text{ (avec } q = 1 - p \text{)} \\ &= pq^{2k-2}(1 + q) \\ &= (1 - q^2)(q^2)^{k-1}\end{aligned}$$

Ainsi $Y \sim \mathcal{G}(1 - q^2)$

Exercice 2

1. Par l'absurde, si $\cos(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ alors $\cos^2\left(\frac{n}{2}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc

$$\cos(n) = 2\cos^2\left(\frac{n}{2}\right) - 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -1$$

c'est une contradiction. Ainsi la suite $(\cos(n))_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $|a_n| \leq \frac{1}{n}$ donc $R \geq R_{cv}\left(\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}\right)$, or $R_{cv}\left(\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}\right) = 1$ donc $R \geq 1$.

3. D'après la question 1, $(\cos(n))_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0 donc la série $\sum_{n \geq 1} \cos(n)$ diverge grossièrement.

4. On sait que la série $\sum_{n \geq 1} a_n x^n$ et sa série dérivée $\sum_{n \geq 1} \cos(n) x^{n-1}$ ont même rayon de convergence R .

La série $\sum_{n \geq 1} \cos(n)$ diverge grossièrement donc la série entière dérivée diverge en $x = 1$; donc $R \leq 1$. Ainsi $R = 1$.

5. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a $e^{in} x^n = (xe^i)^n$ donc la série $\sum_{n \geq 0} e^{in} x^n$ converge si et seulement si, $|xe^i| < 1$, c'est-à-dire si et seulement si, $|x| < 1$. Donc $R_{cv}\left(\sum_{n \geq 0} e^{in} x^n\right) = 1$.

Pour tout $x \in]-1, 1[$, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} e^{in} x^n = \frac{1}{1 - xe^i}$.

6. Pour tout $x \in]-1, 1[$ non nul, on a :

$$\begin{aligned}f'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \cos(n) x^{n-1} \\ &= \frac{1}{x} \left[\sum_{n=0}^{+\infty} \cos(n) x^n - 1 \right] \\ &= \frac{1}{x} \left[\operatorname{Re} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} e^{in} x^n \right) - 1 \right] \\ &= \frac{1}{x} \left[\operatorname{Re} \left(\frac{1}{1 - xe^i} \right) - 1 \right] \\ &= \frac{\cos(1) - x}{x^2 - 2x \cos(1) + 1}.\end{aligned}$$

comme $f'(0) = \cos(1)$ alors $\forall x \in]-1, 1[, \quad f'(x) = \frac{\cos(1) - x}{x^2 - 2x \cos(1) + 1}$.

7. Pour tout $x \in]-1, 1[$ on a

$$\begin{aligned}f(x) &= f(0) + \int_0^x \frac{\cos(1) - t}{t^2 - 2t \cos(1) + 1} dt \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^x \frac{2t - \cos(1)}{t^2 - 2t \cos(1) + 1} dt \\ &= -\frac{1}{2} \ln(x^2 - 2x \cos(1) + 1).\end{aligned}$$

donc $\boxed{\forall x \in]-1, 1[, \quad f(x) = -\frac{1}{2} \ln(x^2 - 2x \cos(1) + 1)}.$

8. On montre comme en 4 que le rayon de convergence de cette série entière est égal à 1.

Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\cos^2\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{1}{2} \cos(n) + \frac{1}{2}$ donc, pour tout $x \in]-1, 1[$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos^2\left(\frac{n}{2}\right)}{n} x^n &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n)}{n} x^n + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n \\ &= \frac{1}{2} f(x) - \frac{1}{2} \ln(1-x) \end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\forall x \in]-1, 1[, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos^2\left(\frac{n}{2}\right)}{n} x^n = -\frac{1}{4} \ln(x^2 - 2x \cos(1) + 1) - \frac{1}{2} \ln(1-x)}$

Exercice 3

1. On a

$$B = (3A^2 - A - I_n) A = A^\top A$$

donc $B^\top = (A^\top A)^\top = A^\top A = B$, ainsi $\boxed{B \text{ est symétrique réelle}}.$

2. La matrice B est symétrique réelle et, pour tout $Y \in \mathbb{R}^n$, on a

$$Y^\top B Y = Y^\top A^\top A Y = (AY)^\top A Y = \|AY\|_2^2 \geq 0$$

donc la matrice A est symétrique positive. Par caractérisation spectrale des matrices positives, on a $\boxed{\text{Sp}(B) \subset \mathbb{R}_+}.$

3. On a, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(A^k)^\top = (A^\top)^k$ donc, en transposant l'identité $A^\top = 3A^2 - A - I_n$, on obtient:

$$\boxed{A = 3(A^\top)^2 - A^\top - I_n}.$$

4. En remplaçant $A^\top$ par $3A^2 - A - I_n$ dans l'identité précédente, il vient :

$$A = 3(3A^2 - A - I_n)^2 - (3A^2 - A - I_n) - I_n$$

après simplification on a $\boxed{(3A^2 - A - I_n)^2 - A^2 = 0}$. Ainsi $\boxed{P(X) = (3X^2 - X - 1)^2 - X^2 \text{ annule } A}.$

5. Si P est un polynôme annulateur de A , alors P est annulateur de $A^\top$. Puisque son coefficient dominant est égal à 9 alors $\frac{1}{9}P$ est un polynôme annulateur unitaire de $A^\top$

6. Par une identité remarquable, on a :

$$P(X) = (3X^2 - 2X - 1)(3X^2 - 1)$$

donc $\boxed{P(X) = 9(X-1)\left(X + \frac{1}{3}\right)\left(X - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(X + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)}.$

7. On a $9A^4 - 6A^3 - 6A^2 + 2A + I_n = 0$ donc

$$A(-9A^3 + 6A^2 + 6A - 2I_n) = I_n$$

donc $\boxed{A \in \text{GL}_n(\mathbb{R}) \text{ et } A^{-1} = -9A^3 + 6A^2 + 6A - 2I_n}$

8. P est un polynôme annulateur de A scindé à racines simples donc A est diagonalisable.

Les valeurs propres de A sont parmi les racines de P , ainsi $\text{Sp}(A) \subset \left\{1, -\frac{1}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right\}.$

9. On a

$$\begin{aligned} A^\top V &= (3A^2 - A - I_n) V \\ &= 3A^2 V - AV - I_n V \\ &= 3\lambda^2 V - \lambda V - V \\ &= (3\lambda^2 - \lambda - 1) V \end{aligned}$$

et V est non nul car c'est un vecteur propre de A donc V est un vecteur propre de $A^\top$.

10. On note $\alpha_1 = 1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ les racines du polynôme P .

10.1. On a

$$L_1(X) = \frac{(X - \alpha_2)(X - \alpha_3)(X - \alpha_4)}{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_1 - \alpha_4)}$$

après simplification, il vient :

$$L_1(X) = \frac{9}{8} \left(X + \frac{1}{3} \right) \left(X - \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \left(X + \frac{\sqrt{3}}{3} \right)$$

10.2. Soient c_1, c_2, c_3, c_4 des réels tels que $\sum_{i=1}^4 c_i L_i(X) = 0$.

Pour tout $j \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$ on a

$$\sum_{i=1}^4 c_i L_i(\alpha_j) = \sum_{i=1}^4 c_i \delta_{i,j} = c_j = 0$$

Ainsi la famille (L_1, L_2, L_3, L_4) est libre dans $\mathbb{R}_3[X]$ qui est un espace de dimension 4, donc $\mathcal{L}$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

10.3. Soit $R \in \mathbb{R}_3[X]$, soient c_1, c_2, c_3, c_4 des réels tels que $R(X) = \sum_{i=1}^4 c_i L_i(X)$, alors pour tout $j \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$ on a

$$R(\alpha_j) = \sum_{i=1}^4 c_i L_i(\alpha_j) = \sum_{i=1}^4 c_i \delta_{i,j} = c_j$$

donc
$$R = \sum_{i=1}^4 R(\alpha_i) L_i(X).$$

10.1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

10.1.1. On effectue la division euclidienne de X^k par le polynôme P , il existe $Q, R \in \mathbb{R}[X]$ tels que $R \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que

$$X^k = PQ + R$$

En évaluant cette égalité en les α_i , il vient :

$$\forall i \in \llbracket 1, 4 \rrbracket, \quad R(\alpha_i) = \alpha_i^k$$

d'après 10.3, on a
$$R(X) = \sum_{i=1}^4 \alpha_i^k L_i(X).$$

10.1.2. Puisque P est annulateur de A , en évaluant l'identité $X^k = PQ + R$ en A , on obtient
$$A^k = R(A) = \sum_{i=1}^4 \alpha_i^k L_i(A)$$

10.2. • Puisque $\alpha_1 = 1$ et $|\alpha_i| < 1$ pour $i \in \llbracket 2, 4 \rrbracket$ alors on a

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} A^k = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^4 \alpha_i^k L_i(A) = L_1(A)$$

- Montrons que la limite est une matrice de projection.

Puisque A est diagonalisable, il existe une matrice inversible P telle que

$$A = P \operatorname{diag}(1, \dots, 1, \lambda_1, \dots, \lambda_p) P^{-1}$$

avec $|\lambda_i| < 1$ pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$.

Alors

$$A^k = P \operatorname{diag}(1, \dots, 1, \lambda_1^k, \dots, \lambda_p^k) P^{-1} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \underbrace{P \operatorname{Diag}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0) P^{-1}}_M$$

On a $M^2 = M$ donc $\boxed{\lim_{k \rightarrow +\infty} A_k \text{ est une matrice de projection}}$.

Exercice 4

1. Soit $[a, b]$ est un segment et $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$, alors f' est continue sur $[a, b]$ donc f' est bornée sur $[a, b]$. On note $\|f'\|_\infty$ la borne supérieure de $|f'|$ sur $[a, b]$.

L'inégalité des accroissements finis donne

$$\forall (x, y) \in [a, b]^2, \quad |f(x) - f(y)| \leq \|f'\|_\infty |x - y|$$

donc f est lipschitzienne sur $[a, b]$.

2. Soit f une fonction k -lipschitzienne sur un intervalle I , avec $k > 0$.

Soit $\varepsilon > 0$ et $\alpha = \frac{\varepsilon}{k} > 0$. Alors pour tout $(x, y) \in I^2$,

$$|x - y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq k|x - y| = k\eta = \varepsilon$$

donc f est uniformément continue sur I .

3. Produit de convolution :

Soit $x \in \mathbb{R}$. Puisque f est continue et g est continue par morceaux, $t \mapsto f(x - t)g(t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

D'autre part, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$|f(x - t)g(t)| \leq \|f\|_\infty |g(t)|$$

comme $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ alors $t \mapsto f(x - t)g(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Ainsi $\forall (f, g) \in E \times F$, $f \star g$ est bien définie sur $\mathbb{R}$.

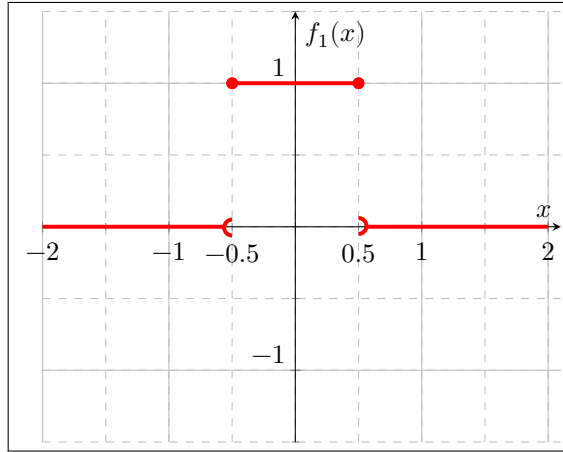
4. Soit $x \in \mathbb{R}$. Le changement de variable $u = x - t$, donne

$$(g \star f)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x - t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - u)g(u)du = (f \star g)(x)$$

Ceci étant valable pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors $\boxed{f \star g = g \star f}$.

5. On pose $f_1 : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

5.1. La représentation graphique de la fonction f_1 est :



5.2. La fonction f_1 est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas continue, car elle est discontinue en $-\frac{1}{2}$ et en $\frac{1}{2}$.

6. Étude de $f_1 \star g$.

6.1. Puisque $f_1 \in E$ et $g \in F$, alors d'après la question **3** on a

$f_1 \star g$ est bien définie sur $\mathbb{R}$.

6.2. Supposons que g est k -lipschitzienne. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, comme $f_1 \star g = g \star f_1$ alors on a :

$$|(f_1 \star g)(x) - (f_1 \star g)(y)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)g(x-t) - f_1(t)g(y-t) dt \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f_1(t)(g(x-t) - g(y-t))| dt$$

l'expression de f_1 permet d'écrire

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f_1(t)(g(x-t) - g(y-t))| dt = \int_{-1/2}^{1/2} |g(x-t) - g(y-t)| dt$$

par suite

$$\begin{aligned} |(f_1 \star g)(x) - (f_1 \star g)(y)| &\leq \int_{-1/2}^{1/2} |g(x-t) - g(y-t)| dt \\ &\leq \int_{-1/2}^{1/2} k|(x-t) - (y-t)| dt \\ &\leq |x-y| \int_{-1/2}^{1/2} k dt \\ &\leq k|x-y| \end{aligned}$$

Ainsi, $(f_1 \star g)$ est k -lipschitzienne et donc $f_1 \star g$ est uniformément continue.

6.3. Pour tout x réel, on a :

$$(f_1 \star g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x-t)g(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{1}_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(x-t)g(t)dt$$

avec $\mathbf{1}_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}$ la fonction caractéristique de $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

Comme

$$x-t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \Leftrightarrow t \in \left[x - \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2}\right]$$

alors : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f_1 \star g)(x) = \int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} g(t)dt.$

6.4. Si g est continue sur $\mathbb{R}$ alors elle admet une primitive G de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

D'après la question précédente et le théorème fondamental de l'analyse, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f_1 \star g)(x) = G\left(x + \frac{1}{2}\right) - G\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

ainsi par composition

$$f_1 \star g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$$

Par dérivation des fonctions composées, on a : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f_1 \star g)'(x) = g\left(x + \frac{1}{2}\right) - g\left(x - \frac{1}{2}\right)}$.

7. Étude de $f_1 \star f_1$.

7.1. On a $f_1 \in E$ et f_1 est nulle en dehors du segment $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ sur lequel elle est continue; elle est donc intégrable sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, $f_1 \in E \cap F$ et, d'après la question 3 :

$f_1 \star f_1$ est bien définie sur $\mathbb{R}$.

7.2. D'après la question 6.3 , on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(f_1 \star f_1)(x) = \int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} \mathbf{1}_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(t) dt$$

Distinguons les cas suivants

- Si $x < -1$ ou $x > 1$, $[x - \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2}] \cap [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] = \emptyset$ donc $(f_1 \star f_1)(x) = 0$.

- Si $-1 \leq x \leq 0$, on a $x + \frac{1}{2} \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ et $x - \frac{1}{2} \leq -\frac{1}{2}$ donc

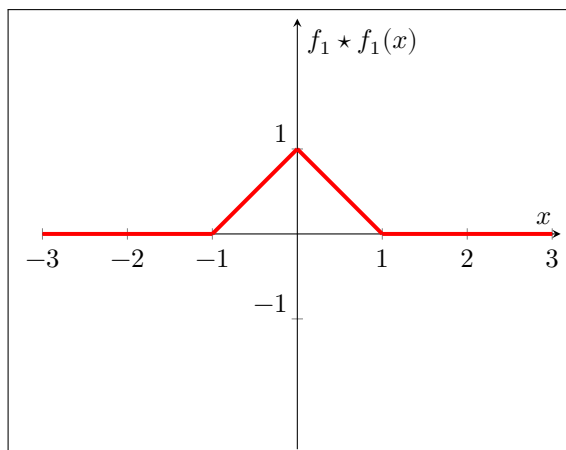
$$(f_1 \star f_1)(x) = \int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} \mathbf{1}_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(t) dt = \int_{-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} dt = x + 1$$

- Si $0 < x \leq 1$, on a $x + \frac{1}{2} > \frac{1}{2}$ et $x - \frac{1}{2} \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ donc

$$(f_1 \star f_1)(x) = \int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} \mathbf{1}_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(t) dt = \int_{x-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dt = 1 - x$$

Ainsi $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f_1 \star f_1)(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ 1 + x & \text{si } x \in [-1, 0] \\ 1 - x & \text{si } x \in]0, 1] \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}}$

7.3. La représentation graphique de la fonction $f_1 \star f_1$ est



7.4. La fonction f_1 est continue sur chacun des intervalles $]-\infty, -1[$ $]-1, 0[$ $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$.

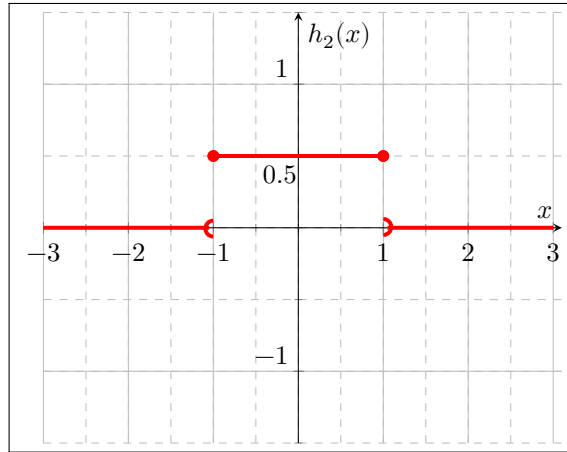
Par ailleurs

$$\begin{cases} f(-1) = 0 = \lim_{x \rightarrow -1^-} (f_1 \star f_1)(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (1+x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (f_1 \star f_1)(x) \\ f(0) = 1 = \lim_{x \rightarrow 0^-} (f_1 \star f_1)(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1-x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (f_1 \star f_1)(x) \\ f(1) = 0 = \lim_{x \rightarrow 1^-} (f_1 \star f_1)(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (1-x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (f_1 \star f_1)(x) \end{cases}$$

donc pour tout $a \in \{-1, 0, 1\}$ on a $f(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} (f_1 \star f_1)(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} (f_1 \star f_1)(x)$ donc $(f_1 \star f_1)$ est continue en a , ainsi $f_1 \star f_1$ est continue sur $\mathbb{R}$.

7.1. $h_2 : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{2}f_1(\frac{x}{2})$ donc pour tout $h_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } x \in [-1, 1] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$.

La représentation graphique de la fonction h_2 est :



7.2. h_α est nulle en dehors sur segment $[-\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}]$ où elle est continue et constante égale à $\frac{1}{\alpha}$. Elle est donc intégrable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h_\alpha(x) dx = \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \frac{1}{\alpha} dx = \frac{\alpha}{\alpha} = 1$$

Ainsi $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} h_\alpha(x) dx = 1}$.

7.3. Soit x_0 un point de continuité de g .

Pour tout $\alpha > 0$, par une méthode analogue à celle de la question 6.3, on obtient

$$(h_\alpha \star g)(x_0) = \frac{1}{\alpha} \int_{x_0 - \frac{\alpha}{2}}^{x_0 + \frac{\alpha}{2}} g(t) dt$$

posons $G : x \mapsto \int_{-\infty}^x g(t) dt$, alors

$$(h_\alpha \star g)(x_0) = \frac{G(x_0 + \frac{\alpha}{2}) - G(x_0 - \frac{\alpha}{2})}{\alpha}$$

Puisque g est continue en x_0 , le théorème fondamental de l'analyse assure que la fonction $x \mapsto \int_0^x g(t) dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ en x_0 et de dérivée en x_0 égale à $g(x_0)$, comme $G(x) = \int_0^x g(t) dt + \int_{-\infty}^0 g(t) dt$ et $\int_{-\infty}^0 g(t) dt$ est une constante alors G est de classe $\mathcal{C}^1$ en x_0 et de dérivée en x_0 égale à $g(x_0)$, ainsi :

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{G(x_0 + \frac{\alpha}{2}) - G(x_0 - \frac{\alpha}{2})}{\alpha} = g(x_0)$$

ce qui prouve $\boxed{\lim_{\alpha \rightarrow 0} (h_\alpha \star g)(x_0) = g(x_0)}$.

7.1. Soit $h \in E$ et $g \in F$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$|(h \star g)(x)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} h(x-t)g(t)dt \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |h(x-t)g(t)|dt$$

h est bornée sur $\mathbb{R}$, donc $\forall (x, t) \in \mathbb{R}^2$ $|h(x-t)| \leq \|h\|_\infty$, par suite

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(x-t)g(t)|dt \leq \|h\|_\infty \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|dt = \|h\|_\infty \|g\|_1.$$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\boxed{\|h \star g\|_\infty \leq \|h\|_\infty \|g\|_1}$.

7.2. Soit $g \in F$ fixée

- L'inégalité obtenue à la question précédente montre que $h \star g \in E$ pour tout $h \in E$, donc l'application

$$\begin{array}{ccc} \Phi : E & \rightarrow & E \\ h & \mapsto & h \star g \end{array}$$

est bien définie.

La linéarité de l'intégrale assure la linéarité de Φ , donc Φ est un endomorphisme de E .

- L'inégalité obtenue à la question précédente s'écrit

$$\forall h \in E, \quad \|\Phi(h)\|_\infty \leq \|g\|_1 \|h\|_\infty$$

donc Φ est une application linéaire continue sur $(E, \|\cdot\|_\infty)$.

7.3. Puisque l'on a :

$$\forall h \in E, \quad \|\Phi(h)\|_\infty \leq \|g\|_1 \|h\|_\infty$$

alors

$$\|\Phi\| = \sup \frac{\|\Phi(h)\|_\infty}{\|h\|_\infty} \leq \|g\|_1$$

8. Notons $U = [-A, A]$, on a U est un compact et $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus U$, f est donc bornée intégrable sur $\mathbb{R}$ et

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)| = \sup_{t \in U} |f(t)|.$$

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, supposons $|y - x| \leq 1$.

Les applications $t \mapsto f(x-t)$ et $t \mapsto f(y-t)$ sont intégrables sur $\mathbb{R}$, donc

$$\begin{aligned} |(f \star g)(x) - (f \star g)(y)| &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-t) - f(y-t)| |g(t)| dt \\ &\leq \|g\|_\infty \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-t) - f(y-t)| dt \quad (*) \end{aligned}$$

par le changement de variable $u = y - t$ on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-t) - f(y-t)| dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-y+u) - f(u)| du$$

L'ensemble D des points de discontinuité de f est de cardinal fini donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-t) - f(y-t)| dt = \int_{\mathbb{R}} |f(x-y+u) - f(u)| du = \int_{\mathbb{R} \setminus D} |f(x-y+u) - f(u)| du \quad (**)$$

L'application $(v, u) \mapsto |f(v+u) - f(u)|$ vérifie :

$$|f(v+u) - f(u)| \xrightarrow{v \rightarrow 0} 0 \quad \forall u \in \mathbb{R} \setminus D$$

et

$$|f(v+u) - f(u)| \leq \begin{cases} 2 \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)| & \text{si } u \in [-A-1, A+1] \text{ et } v \in [-1, 1] \\ 0 & \text{si } u \in \mathbb{R} \setminus [-A-1, A+1] \text{ et } v \in [-1, 1] \end{cases}$$

Le théorème de la convergence dominée donne

$$\int_{\mathbb{R} \setminus D} |f(v+u) - f(u)| du \xrightarrow{v \rightarrow 0} 0$$

Alors pour $\varepsilon > 0$, il existe $0 < \alpha < 1$ tel que :

$$|v| < \alpha \Rightarrow \int_{\mathbb{R} \setminus D} |f(v+u) - f(u)| du \leq \frac{\varepsilon}{\|g\|_\infty}$$

(on suppose $\|g\|_\infty \neq 0$, car le cas $g = 0$ est trivial) .

Les relations (*) et (**) donnent alors

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |x - y| < \alpha \Rightarrow |(f \star g)(x) - (f \star g)(y)| \leq \varepsilon$$

Ce qui prouve $f \star g$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.