e3a POLYTECH

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE MPI

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé de quatre exercices indépendants.

EXERCICE 1

Soit n un entier naturel non nul. On note $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ et pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $P_k = X^k$.

Questions de cours

Soit α un réel.

1. Justifier que la famille $\mathcal{E} = (1, X - \alpha, ..., (X - \alpha)^n)$ est une base de E_n.

2. Soit P un polynôme de E_n.
Donner sans démonstration la décomposition de P dans la base $\mathcal{E}$ à l'aide des dérivées successives du polynôme P.

3. On suppose que α est une racine d'ordre $r \in [\![1, n]\!]$ de P.
Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de P par $(X - \alpha)^r$.

*****

À tout polynôme P de E_n, on associe le polynôme Q défini par :

$$Q(X) = X\,P(X) - \frac{1}{n}\,(X^2 - 1)\,P'(X)$$

et on note T l'application qui à P associe Q.

4. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Déterminer $T(P_k)$.

5. Montrer que T est un endomorphisme de E_n.

6. Écrire la matrice M de T dans la base $\mathscr{B} = (P_0, P_1, ..., P_n)$ de E_n.

7. On suppose que λ est une valeur propre réelle de l'endomorphisme T et soit P un polynôme unitaire, vecteur propre associé à la valeur propre λ.

7.1. Montrer que P est de degré n.

7.2. Soit z_0 une racine complexe de P d'ordre de multiplicité $r \in \mathbb{N}^*$. Prouver que $z_0^2 - 1 = 0$.

7.3. En déduire une expression de P.

8. Déterminer les éléments propres de l'endomorphisme T.
L'endomorphisme T est-il diagonalisable ?

EXERCICE 2

Questions de cours

1. Soit a et b deux réels avec $a > 0$. Choisir sans justification l'expression correcte de a^b :

$$(A) : \mathrm{e}^{b\,\ln(a)} \qquad (B) : \mathrm{e}^{a\,\ln(b)} \qquad (C) : \mathrm{e}^{\ln(a)\,\ln(b)}.$$

2. Soit x et y deux réels tels que $x < y$ et t un réel de $]0, 1[$.
Comparer t^x et t^y.

3. Donner, sans démonstration, le développement en série entière de la fonction exponentielle réelle et donner son domaine de validité.

4. On considère la fonction Γ définie par $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \mathrm{d}t$.

On admet que cette fonction est définie sur $]0, +\infty[$ et que, pour tout réel x strictement positif :

$$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x).$$

Calculer $\Gamma(1)$ et en déduire, en effectuant un raisonnement par récurrence, la valeur de $\Gamma(n+1)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

*****

5. Pour $x \in \mathbb{R}$, on note, lorsque cela a un sens :

$$F(x) = \int_0^1 t^{t^x} \mathrm{d}t$$

où, comme il est d'usage, $t^{t^x} = t^{(t^x)}$.

5.1. Déterminer l'ensemble de définition de F.

5.2. Déterminer le sens de variation de F.

5.3. Démontrer que pour tout x réel positif, on a : $F(x) \geqslant \dfrac{1}{2}$.

5.4. Démontrer que F est continue sur son ensemble de définition.

5.5. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x)$.

Les théorèmes utilisés seront cités avec précision et on s'assurera que leurs hypothèses sont bien vérifiées.

5.6. Dresser alors avec soin le tableau de variations de F et donner une allure générale de sa courbe représentative dans un repère orthonormal. On admettra que $F'(0) = \dfrac{1}{4}$ et on tracera la tangente au point d'abscisse $x = 0$.

6. Soit x un réel strictement positif.

Pour tout entier naturel n, on note g_n la fonction définie sur $]0, 1]$ par $g_n(t) = \dfrac{t^{nx} \ln^n(t)}{n!}$.

6.1. Démontrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}} g_n$ converge simplement sur $]0, 1]$ et donner sa somme.

6.2. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $\displaystyle\int_0^1 |g_n(t)|\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n!} \frac{\Gamma(n+1)}{(nx+1)^{n+1}}$.

6.3. Établir enfin que l'on a :

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(1+nx)^{n+1}}.$$

EXERCICE 3

On note E l'espace vectoriel des fonctions à valeurs réelles continues sur $\mathbb{R}_+$.
Pour tout élément f de E et tout $x \in \mathbb{R}_+$ on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u$.

1. Justifier que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et donner pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ l'expression de $F'(x)$.

Soit $\Psi : f \in E \mapsto \Psi(f)$ définie par : $\forall\ x \in \mathbb{R}_+,\ \Psi(f)(x) = \displaystyle\int_0^1 f(xt)\,\mathrm{d}t$.

2. Exprimer, pour tout réel x strictement positif, $\Psi(f)(x)$ à l'aide de $F(x)$.

3. Justifier que la fonction $\Psi(f)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et donner la valeur de $\Psi(f)(0)$.

4. Montrer que Ψ est un endomorphisme de E.

5. Surjectivité de Ψ

Soit $h : x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto h(x) = \begin{cases} x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{pour } x > 0 \\ 0 & \text{pour } x = 0 \end{cases}$.

5.1. Montrer que la fonction h est continue sur $\mathbb{R}_+$.

5.2. La fonction h est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$?

5.3. Soit $g \in \mathrm{Im}(\Psi)$.
Montrer que la fonction $x \mapsto x\,g(x)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$.

5.4. A-t-on $h \in \mathrm{Im}(\Psi)$?

5.5. Conclure.

6. Montrer que Ψ est injective.

7. Recherche des éléments propres de Ψ

7.1. Justifier que 0 n'est pas valeur propre de Ψ.

Soit $\mu \in \mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle (L) sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$y' + \frac{\mu}{x}\,y = 0.$$

7.2. Résoudre (L) sur $\mathbb{R}_+^*$.

7.3. Déterminer les solutions de (L) prolongeables par continuité sur $\mathbb{R}_+$.

7.4. Déterminer alors les valeurs propres de Ψ et les sous-espaces propres associés.

8. Soit $n \in \mathbb{N},\ n > 1$. Pour $i \in [\![1,n]\!]$, on pose :

$$f_i : x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto f_i(x) = x^i \text{ et } g_i : x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto g_i(x) = \begin{cases} x^i \ln(x) & \text{pour } x > 0 \\ 0 & \text{pour } x = 0 \end{cases}$$

On note $\mathscr{B} = (f_1, ..., f_n, g_1, ..., g_n)$ et F_n le sous-espace vectoriel de E engendré par $\mathscr{B}$.

8.1. On veut montrer que la famille $\mathcal{B} = (f_1, ..., f_n, g_1, ..., g_n)$ est une base de F_n

Soit $(\alpha_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ et $(\beta_j)_{j\in[\![1,n]\!]}$ des scalaires tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i + \sum_{j=1}^{n} \beta_j g_j = 0.$ $(*)$

8.1.1. Montrer que $\alpha_1 = \beta_1 = 0$.

On pourra simplifier l'expression $(*)$ *par* x *lorsque* x *est non nul.*

8.1.2. Soit $p \in [\![1, n-1]\!]$. On suppose que $\alpha_1 = \cdots = \alpha_p = \beta_1 = \cdots = \beta_p = 0$.

Démontrer que $\alpha_{p+1} = \beta_{p+1} = 0$.

8.1.3. Conclure et déterminer la dimension de l'espace vectoriel F_n.

8.2. Où l'on démontre que Ψ induit un endomorphisme sur F_n

8.2.1. Soit $x > 0$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^x t^p \ln(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente et la calculer.

8.2.2. En déduire que Ψ induit un endomorphisme Ψ_n sur F_n.

8.3. Donner la matrice de l'application Ψ_n dans la base $\mathcal{B}$.

8.4. Démontrer que Ψ_n est un automorphisme de F_n.

8.5. Soit $z : x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto z(x) = \begin{cases} \left(x + x^2\right) \ln(x) & \text{pour } x > 0 \\ 0 & \text{pour } x = 0 \end{cases}$.

Après avoir vérifié que $z \in F_n$, déterminer $\Psi_n^{-1}(z)$.

EXERCICE 4

Question de cours

1. Rappeler la définition d'un évènement négligeable et d'un évènement presque sûr.

*****

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels telle que $u_0 = 1$ et pour tout $n \geqslant 1$, $u_n \in]0, 1[$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $p_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n} u_k$.

2. Étude de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$

2.1. Montrer que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. On note ℓ sa limite.

2.2. Démontrer que $\ell \in [0, 1[$.

2.3. Soit $q \in [0, 1[$. Montrer que si à partir d'un certain rang n_0, on a $u_n \leqslant q$, alors $\ell = 0$.

2.4. Que peut-on dire de ℓ si la suite (u_n) est décroissante ?

2.5. Déterminer la valeur de ℓ dans le cas où $u_0 = 1$ et pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = 1 - \dfrac{1}{(n+1)^2}$.

3. On considère une famille $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ avec :

- X_0 est constante et égale à 1,
- X_1 suit la loi de Bernoulli de paramètre u_1,
- pour tout $n \geqslant 1$, X_n suit une loi de Bernoulli de telle sorte que :

$$\mathbb{P}_{[X_n=0]}([X_{n+1} = 1]) = 0 \text{ et } \mathbb{P}_{[X_n=1]}([X_{n+1} = 1]) = u_{n+1}.$$

3.1. Démontrer par récurrence sur l'entier naturel n que l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}([X_n = 1]) = p_n.$$

3.2. En déduire l'espérance $\mathbb{E}(X_n)$ de la variable aléatoire X_n.

3.3. Déterminer les valeurs de l'entier naturel n pour lesquelles les deux variables aléatoires X_n et X_{n+1} sont indépendantes.

4. On suppose que $\ell = 0$

4.1. Soit deux entiers naturels non nuls m et n tels que $m < n$.
Montrer que la probabilité de l'évènement $[X_m = 0] \cap [X_{m+1} = 1] \cap \ldots \cap [X_n = 1]$ est nulle.

4.2. Quelle est la probabilité de l'évènement $\displaystyle\bigcap_{k=0}^{n} [X_k = 1]$?

4.3. En déduire que la probabilité de l'évènement $A = \displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [X_n = 1]$ est nulle.

4.4. On définit les variables aléatoires Y et Z par :

$$\forall \omega \in \Omega, \; Y(\omega) = \begin{cases} \operatorname{Max} \{n \in \mathbb{N} \,/\, X_n(\omega) = 1\} & \text{s'il existe} \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$\forall \omega \in \Omega, \quad Z(\omega) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} X_k(\omega) & \text{si la série converge} \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}.$$

Démontrer que $\mathbb{P}([Y \neq Z]) = 0$.
Que peut-on en conclure pour l'évènement $[Y = Z]$?

FIN