Un corrigé E3A MP 2021 Mathématiques

1 Exercice I

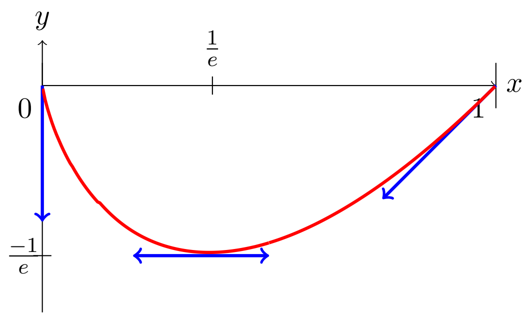
1. $f : x \mapsto e^{-x\ln(x)}$ est continue sur $]0,1]$ comme produit et composition de fonctions continues et, pour $n > 0$, les f_n sont continues sur $]0,1]$ comme produit de fonctions continues.
De plus, d'après les croissances comparées, pour $n > 0$
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} e^{-x\ln(x)} = 1 = f(0) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^+} f_n(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{(-1)^n}{n!}(x\ln(x))^n = 0 = f_n(0)$$
Donc f et les f_n pour $n > 0$ sont continues en 0. Enfin, f_0 est constante donc continue donc $\boxed{f \text{ est continue sur } I \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ f_n \text{ est continue sur } I}$.

2. Notons que, $\forall x \in I\backslash\{0\}$, $\sum f_n(x) = \sum \dfrac{(-x\ln(x))^n}{n!}$ est la série entière de l'exponentielle en $-x\ln(x)$.
Comme l'exponentielle est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, $\sum f_n(x)$ est convergente et
$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = e^{-x\ln(x)} = f(x)$.
Si $x = 0$, $\sum f_n(0)$ converge car $f_n(0) = 0$ si $n > 0$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(0) = f_0(0) = 1 = f(0)$.
Donc $\boxed{\sum f_n \text{ converge simplement sur } I \text{ et } \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n = f \text{ sur } I}$.

3. φ est dérivable comme produit de fonctions dérivables et $\varphi'(t) = \ln(t) + 1$ donc $\varphi'(t) \leq 0$ si $t \in \left]0, \frac{1}{e}\right]$ et $\varphi'(t) \geq 0$ si $t \in \left[\frac{1}{e}, 1\right]$. Ce qui donne le tableau de variation suivant :

x	0		$\frac{1}{e}$		1
$\varphi'(x)$		$-$	0	$+$	
$\varphi(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$	0

4. $\lim\limits_{t\to 0^+} \varphi'(t) = -\infty$ donc la tangente en 0 est d'équation $x = 0$ et $\varphi'(1) = 1$ donc la tangente en 1 est d'équation $y = x - 1$. d'où le graphique :



5. Comme f_n s'annule en 0, que sur $]0,1]$ $f_n = \dfrac{(-1)^n}{n!}\varphi^n$ et que d'après la question 3., $\mathcal{N}_\infty(\varphi) = \dfrac{1}{e}$ alors $\mathcal{N}_\infty(f_n) = \dfrac{1}{n!e^n}$.

Or $\sum \frac{1}{n!e^n}$ converge car c'est la série entière de l'exponentielle en $\frac{1}{e}$ donc $\boxed{\sum f_n \text{ converge normalement sur } I}$.

6. 1. Notons $g_x : t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$.
   - g_x est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit et composition de fonctions fonctions continues par morceaux.
   - $\lim_{t\to+\infty} t^2 g_x(t) = 0$ par croissances comparées donc $g_x(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et comme, d'après les intégrales de Riemann $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable en $+\infty$ alors, d'après le théorème de comparaison, g_x est intégrable en $+\infty$.
   - $g_x(t) \underset{t\to 0^+}{\sim} \frac{1}{t^{1-x}}$ et, d'après les intégrales de Riemann $t \mapsto \frac{1}{t^{1-x}}$ est intégrable en 0^+ si et seulement si $x > 0$. Donc, d'après le théorème de comparaison, g_x est intégrable en 0^+ si et seulement si $x > 0$.

   Donc $\boxed{\Gamma \text{ est définie sur } \mathbb{R}_+^*}$.

   6.2 Posons $\mathcal{P}_n : \Gamma(n+1) = n!$.
   - $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}dt = \left[-e^{-t}\right]_0^{+\infty} = 1$ donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
   - Supposons $\mathcal{P}_n$ vrai. En procédant par intégration par parties (les fonctions concernées sont de classe $\mathcal{C}^1$), pour $x > 0$

$$\left\{\begin{array}{l} u = t^{n+1} \\ v' = e^{-t} \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} u' = (n+1)t^n \\ v = -e^{-t} \end{array}\right.$$

$$\begin{aligned} \int_0^x t^{n+1}e^{-t}dt &= \left[-t^{n+1}e^{-t}\right]_0^x + (n+1)\int_0^x t^n e^{-t}dt \\ &= -x^{n+1}e^{-x} + (n+1)\int_0^x t^n e^{-t}dt \end{aligned}$$

   En faisant tendre x vers $+\infty$, d'après les croissances comparées et en utilisant $\mathcal{P}_n$, on obtient $\Gamma(n+2) = (n+1)\Gamma(n+1) = (n+1)n! = (n+1)!$ donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

   Donc, par récurrence, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \Gamma(n+1) = n!}$.

7. Avec le changement de variable $\left\{\begin{array}{l} u = -\ln(t) \\ du = -\frac{dt}{t} \end{array}\right.$ qui est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement décroissant,

$$\begin{aligned} \int_0^1 f_n(t)dt = \frac{(-1)^n}{n!}\int_0^1 (t\ln(t))^n dt &= \frac{(-1)^{n+1}}{n!}\int_0^1 t^{n+1}\ln^n(t)\left(-\frac{dt}{t}\right) \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{n!}\int_{+\infty}^0 e^{-(n+1)u}(-u)^n du \\ &= \frac{1}{n!}\int_0^{+\infty} u^n e^{-(n+1)u}du \end{aligned}$$

Avec le changement de variable $\left\{\begin{array}{l} v = (n+1)u \\ dv = (n+1)du \end{array}\right.$ qui est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement croissant, on obtient :

$$\int_0^1 f_n(t)dt = \frac{1}{n!}\int_0^{+\infty} u^n e^{-(n+1)u}du = \frac{1}{n!}\int_0^{+\infty} \frac{v^n}{(n+1)^n}e^{-v}\frac{dv}{n+1} = \frac{1}{n!(n+1)^{n+1}}\Gamma(n+1)$$

Donc d'après la question précédente, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ J_n = \frac{1}{(n+1)^{n+1}}}$.

8. — D'après la question 1., les f_n sont continues donc continues par morceaux sur le segment $[0,1]$ donc intégrables sur I.

— D'après la question 2., $\sum f_n$ converge simplement vers f qui, d'après la question 1, est continue donc continue par morceaux sur I.

— d'après la question 7, si $n \in N^*$, $\displaystyle\int_0^1 |f_n(t)|dt = \int_0^1 f_n(t)dt = \frac{1}{(n+1)^{n+1}}$ et $\displaystyle\int_0^1 |f_0(t)|dt = \int_0^1 1dt = 1 = 1^{-1}$. Donc $\displaystyle\sum \int_0^1 |f_n(t)|dt = \sum_{n\geq 1} n^{-n}$.

Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^2 n^{-n} = 0$ donc $n^{-n} = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Comme, d'après les séries de Riemann, $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ est convergente alors, d'après le théorème de comparaison, $\displaystyle\sum \int_0^1 |f_n(t)|dt = \sum_{n\geq 1} n^{-n}$ l'est aussi.

Donc d'après le théorème d'intégration terme à terme, f est intégrable sur I et

$\boxed{\displaystyle J = \int_0^1 f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 f_n(t)dt = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-n}}$.

9. Notons que $\forall n > n_0$, $0 \leq n^{-n} \leq (n_0+1)^{-n}$ donc, d'après la somme d'une série géométrique,

$$0 \leq \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} n^{-n} \leq \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} (n_0+1)^{-n} = (n_0+1)^{-(n_0+1)}\frac{1}{1-\frac{1}{n_0+1}} = \frac{1}{(n_0+1)^{n_0} n_0}$$

Avec $n_0 = 9$, le reste est inférieur à 9.10^{-9} donc à 10^{-6} donc

$\boxed{\text{la somme partielle d'ordre 9 est une valeur approchée à } 10^{-6} \text{ de } J}$.

Avec la calculette on trouve $n_0 = 7$ est le plus petit n_0 possible, mais elle n'était pas autorisée ici.

2 Exercice 2

1. 1. Théorème spectral : Si f est un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E alors il est diagonalisable dans une base orthonormée de E.

1.2. Comme f est non inversible alors $\chi_f(0) = \det(0-f) = (-1)^n \det(f) = 0$ donc $\boxed{0 \text{ est valeur propre de } f}$
Si f n'admet que 0 comme valeur propre, alors comme f symétrique dans un espace vectoriel euclidien, d'après le théorème spectral, il existe une base orthonormée dans laquelle la matrice de f est diagonale. Comme les coefficients diagonaux de la matrice diagonale sont les valeurs propres de f, elle est nulle donc f est nul. Contradiction avec l'énoncé donc $\boxed{f \text{ admet une valeur propre non nulle}}$.

1.3. Soit $x \in \mathrm{Ker}(f)$ et $y \in \mathrm{Im}(f)$ donc $f(x) = 0$ et $\exists z \in E$, $f(z) = y$. Comme f est symétrique :

$$(x|y) = (x|f(z)) = (f(x)|z) = (0|z) = 0$$

Donc $\forall x \in \mathrm{Ker}(f)$, $\forall y \in \mathrm{Im}(f)$, $x \perp y$ donc $\boxed{\mathrm{Ker}(f) \text{ et } \mathrm{Im}(f) \text{ sont orthogonaux}}$.
Comme ils sont orthogonaux, ils sont en somme directe. De plus, d'après le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim(E)$ donc $\boxed{\mathrm{Ker}(f) \text{ et } \mathrm{Im}(f) \text{ sont supplémentaires dans } E}$.

1.4. Comme f est diagonalisable d'après la question 1.2., $\displaystyle\bigoplus_{i=0}^{k} E_i = E$. Donc

$\forall x \in E$, $\forall i \in \{0,\dots,n\}$, $\exists! x_i \in E_i$, $\displaystyle x = \sum_{i=0}^{k} x_i$. De plus les E_i sont orthogonaux deux à deux car f est symétrique donc $\forall i \in \{0,\dots,n\}$, $\displaystyle\sum_{j\neq i, j=0}^{k} x_j \in E_i^{\perp}$ et comme $x_i \in E_i$ et $\displaystyle x = x_i + \sum_{j\neq i,j=0}^{k} x_j$ alors d'après la définition de p_i, $p_i(x) = x_i$. Et donc $\forall x \in E$, $\displaystyle\sum_{i=0}^{k} p_i(x) = \sum_{i=0}^{k} x_i = x$. Donc $\boxed{\displaystyle\sum_{i=0}^{k} p_i = id_E}$.

1.5. Soit $x \in E$, alors, avec les notations de la question précédente, $p_i \circ p_j(x) = p_i(x_j)$. or $x_j \in E_j$ donc, comme $i \neq j$ et donc $E_i \perp E_j$, $x_j \in E_i^{\perp}$ donc $p_i \circ p_j(x) = p_i(x_j) = 0$ donc $\boxed{\forall (i,j) \in \{0, \ldots, k\}^2, \text{ si } i \neq j \text{ alors } p_i \circ p_j = 0}$.

1.6. Toujours avec les notations des questions précédentes, $\forall x \in E$,

$$f(x) = f\left(\sum_{i=0}^{k} x_i\right) = \sum_{i=0}^{k} f(x_i) = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i x_i = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i p_i(x)$$

Donc $\boxed{f = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i p_i}$.

1.7. Comme $E_0 = \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f)^{\perp}$ d'après la question 1.3. alors d'après la question 1.4., $\forall x \in E$, $x_0 \in E_0 = \mathrm{Im}(f)^{\perp}$ et $\sum_{i=1}^{k} x_i \in E_0^{\perp} = \mathrm{Im}(f)$ donc $p(x) = \sum_{i=1}^{k} x_i = \sum_{i=1}^{k} p_i(x)$. Donc $\boxed{p = \sum_{i=1}^{k} p_i}$.

2. 1. Soit $x \in E$,

$$f \circ f^I(x) = f \circ f^I\left(\sum_{i=0}^{k} x_i\right) = f\left(\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\lambda_i} p_i(x)\right) = f\left(\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\lambda_i} x_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\lambda_i} f(x_i) = \sum_{i=1}^{k} x_i = p(x)$$

Donc $\boxed{f \circ f^I = p}$. Donc

$$f(x) = p(y) \Leftrightarrow f(x) - f \circ f^I(y) = 0 \Leftrightarrow f(x - f^I(y)) = 0 \Leftrightarrow x - f^I(y) \in \mathrm{Ker}(f)$$

Donc $\boxed{\forall (x,y) \in E^2,\ f(x) = p(y) \Leftrightarrow x - f^I(y) \in \mathrm{Ker}(f)}$.

2.2. Comme $\mathrm{Im}(f) = \{f(z), z \in E\}$ alors $\inf_{z \in E} \|f(z) - y\| = d(y, \mathrm{Im}(f))$. Comme $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E, la borne inférieure est un minimum qui est atteint uniquement quand $f(z)$ est le projeté orthogonal de y sur $\mathrm{Im}(f)$ donc

$$\|f(x) - y\| = \inf_{z \in E} \|f(z) - y\| \Leftrightarrow f(x) = p(y)$$

Donc d'après la question précédente, $\boxed{\forall x \in E,\ \left(\|f(x) - y\| = \inf_{z \in E} \|f(z) - y\| \Leftrightarrow x - f^I(y) \in \mathrm{Ker}(f)\right)}$.

3. 1. Comme la matrice de f dans une base orthonormée est symétrique, $\boxed{f \text{ est symétrique}}$.

Comme $A \neq 0$ alors $\boxed{f \text{ est non nul}}$.

Comme les deuxième et quatrième colonnes de A sont opposées, $\mathrm{rg}(A) < 4$ et donc A n'est pas inversible. Donc $\boxed{f \text{ n'est pas inversible}}$.

3.2. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \lambda - 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} & \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_1}{\overset{L_4 \leftarrow L_4 + L_2}{=}} \begin{vmatrix} \lambda - 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 & 1 \\ \lambda - 2 & 0 & \lambda - 2 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \lambda \end{vmatrix} \\
& \underset{C_1 \leftarrow C_1 - C_3}{\overset{C_2 \leftarrow C_2 - C_4}{=}} \begin{vmatrix} \lambda - 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda - 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda - 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} \\
& = \lambda(\lambda - 2)^2(\lambda - 4)
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{2 \text{ est valeur propre double de la matrice } A}$

3.3. D'après la question précédente $\boxed{A \text{ admet exactement trois valeurs propres } \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2}$ (avec $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = 4$).

3.4. D'après la question 1.6., $f = \displaystyle\sum_{j=0}^{2} \lambda_j p_j$ donc

$$A = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}\left(\sum_{j=0}^{2} \lambda_j p_j\right) = \sum_{j=0}^{2} \lambda_j \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(p_j) = \sum_{j=0}^{2} \lambda_j M_j$$

Et d'après la question précédente, $\boxed{A = 2M_2 + 4M_4}$.

3.5. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ alors

$$AX = 4X \Leftrightarrow \begin{cases} -x - z = 0 \\ -3y - t = 0 \\ -x - z = 0 \\ -y - 3t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -x \\ t = -3y \\ 0 = 0 \\ -y + 9y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -x \\ y = t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -x \\ 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc, en notant $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \mathrm{Vect}(u)$ et comme u est non nul, $\boxed{\dim(E_2) = 1}$. Comme $\|u\| = \sqrt{2}$ alors $\boxed{v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} u \text{ est un vecteur de } E_2 \text{ tel que } \|v_2\| = 1}$.

3.6. Soit $x \in E$, comme (v_2) est une base orthonormale du sous-espace vectoriel de dimension finie E_2 alors $\boxed{p_2(x) = (x|v_2)v_2}$.

3.7. Soit $x \in E$. En notant $X = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(x)$ et $V_2 = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(v_2)$ alors, d'après la question précédente et comme $\alpha V_2 = V_2.(\alpha)$ (avec $(\alpha) \in M_1(\mathbb{R})$).

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(p_2(x)) = (x|v_2)\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(v_2) = V_2.(V_2^T X) = (V_2 V_2^T)X$$

Donc $\boxed{M_2 = V_2 V_2^T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$.

4. D'après la question 3.4. et la précédente, $M_1 = \frac{1}{2}(A - 4M_2) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. D'après la définition de f^I,

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f^I) = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}\left(\frac{1}{\lambda_1}p_1 + \frac{1}{\lambda_2}p_2\right) = \frac{1}{2}M_1 + \frac{1}{4}M_2 = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Donc $\boxed{\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f^I) = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$.

3 Exercice 3

1. D'après le cours, $\forall t \in]-1,1[$, $\dfrac{1}{1-t} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} t^n$, donc $\forall t \in]-2,2[$,

$$G_X(t) = \frac{1}{2-t} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{t}{2}} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^n}{2^n}$$

   Donc $\boxed{\forall t \in]-2,2[,\ G_X(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^n}{2^{n+1}}}$.

2. D'après le cours, $\forall t \in]-1,1[$, $(1+t)^\alpha = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\prod_{k=0}^{n-1}(\alpha-k)}{n!}t^n$ donc, $\forall t \in]-1,1[$,

$$(1+t)^{\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\prod_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}-k\right)}{n!}t^n$$

   Pour $n \in \mathbb{N}^*$, le coefficient d'ordre n est donc :

$$\frac{\prod_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}-k\right)}{n!} = \frac{1}{2}\frac{(-1)^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}(2k-1)}{2^{n-1}n!} = \frac{(-1)^{n-1}(2n-2)!}{2^n\left(\prod_{k=1}^{n-1}2k\right)n!} = \frac{(-1)^{n-1}(2n-2)!}{2^{2n-1}(n-1)!n!}$$

   Donc, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \text{ le coefficient d'ordre } n \text{ demandé est } \dfrac{(-1)^{n-1}(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n-1)}}$.

3. D'après la question précédente,

$$G_Y(t) = 2-\sqrt{2}\sqrt{1-\frac{t}{2}} = 2-\sqrt{2}-\sqrt{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n-1)}\left(-\frac{t}{2}\right)^n = 2-\sqrt{2}+\sqrt{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n)!}{2^{3n}(n!)^2(2n-1)}t^n$$

4. D'après le cours $G_X(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}P(X=n)t^n$ et $G_Y(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}P(Y=n)t^n$ donc d'après l'unicité du développement en séries entières, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ P(X=n) = \dfrac{1}{2^{n+1}}}$ et $\boxed{P(Y=0) = 2-\sqrt{2} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(Y=n) = \dfrac{\sqrt{2}(2n)!}{2^{3n}(n!)^2(2n-1)}}$.

5. Comme X et Y sont indépendantes, d'après le cours, $G_S(t) = G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t) = \dfrac{1}{1-\frac{t}{2}} - (2-t)^{-\frac{1}{2}}$.
   De même que dans les questions précédentes,

$$\frac{1}{1-\frac{t}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^n}{2^n}$$

et

$$(2-t)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1-\frac{t}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\prod_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{1}{2}-k\right)}{n!}\left(-\frac{t}{2}\right)^n$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)}{2^{2n}n!}t^n$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n)!}{2^{3n}(n!)^2}t^n$$

Donc $G_S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n}\left(1-\frac{(2n)!}{2^{2n}\sqrt{2}(n!)^2}\right)t^n$ et par unicité du développement en série entière,

$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ P(S=n) = \frac{1}{2^n}\left(1-\frac{(2n)!}{2^{2n}\sqrt{2}(n!)^2}\right)}$.

6. 1. Comme $X(\Omega)=\mathbb{N}$, $(X+1)(\Omega)=\mathbb{N}^*$ et

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(X+1=n) = P(X=n-1) = \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ donc $\boxed{X+1 \sim \mathcal{G}\left(\frac{1}{2}\right)}$.

6.2. D'après le cours $\boxed{E(X) = E(X+1)-1 = \frac{1}{\frac{1}{2}}-1 = 1 \text{ et } V(X) = V(X+1) = \frac{1-\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 2}$.

6.3 G_Y est deux fois dérivable sur $[-1,1]$ comme différence et composition de fonctions deux fois dérivables et $\forall t \in [-1,1]$, $G_Y'(t) = \frac{1}{2}(2-t)^{-\frac{1}{2}}$ et $G_Y''(t) = \frac{1}{4}(2-t)^{-\frac{3}{2}}$. Donc

$\boxed{E(Y) = G_Y'(1) = \frac{1}{2} \text{ et } E(Y(Y-1)) = G_Y''(1) = \frac{1}{4}}$.

6.4 Donc, d'après la formule de Koenig-Huygens, la linéarité de l'espérance et la question précédente,

$$V(Y) = E(Y^2)-E(Y)^2 = E(Y(Y-1))+E(Y)-E(Y)^2 = \frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

Donc $\boxed{V(Y) = \frac{1}{2}}$.

6.5 D'après la linéarité de l'espérance $E(S) = E(X+Y) = E(X)+E(Y)$ donc $\boxed{E(S) = \frac{3}{2}}$.

Comme X et Y sont indépendantes, $V(S) = V(X+Y) = V(X)+V(Y)$ donc $\boxed{V(S) = \frac{5}{2}}$.

4 Exercice 4

1. Notons $P_0 = 1$ et pour $k > 0$, $P_k = X^{k-1}(X-1)$. Alors $\forall k \in \{0,\dots,n\}$, $\deg(P_k) = k$ donc $\mathcal{B} = (P_0,\dots,P_n)$ est une famille de polynômes à degrés successifs donc $\boxed{\mathcal{B} \text{ est une base de } \mathbb{R}_n[X]}$.

2. 1. Soient $(P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ alors, d'après la linéarité de l'intégrale,

$$\varphi(\lambda P+\mu Q) = \int_0^1(\lambda P(t)+\mu Q(t))dt = \lambda\int_0^1 P(t)dt+\mu\int_0^1 Q(t)dt = \lambda\varphi(P)+\mu\varphi(Q)$$

Donc φ est linéaire et comme de plus $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}$ alors $\boxed{\varphi \text{ est une forme linéaire sur } \mathbb{R}_n[X]}$.

2.2. Comme $\mathrm{Im}(\varphi)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$ alors $\mathrm{Im}(\varphi) = \{0\}$ ou $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathbb{R}$.
Or $1 = \varphi(1) \in \mathrm{Im}(\varphi)$ donc $\boxed{\mathrm{Im}(\varphi) = \mathbb{R}}$.
D'après le théorème du rang $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) = \dim(\mathbb{R}_n[X]) - \dim(\mathrm{Im}(\varphi)) = n + 1 - \dim(\mathbb{R})$ donc $\boxed{\dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) = n}$.

3. 1. Soient $(P, R) \in \mathbb{R}_n[X]^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ alors, d'après la linéarité de l'intégrale, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\psi(\lambda P + \mu R)(x) = \int_0^x (\lambda P(t) + \mu Q(t))dt = \lambda \int_0^x P(t)dt + \mu \int_0^x R(t)dt = \lambda\psi(P)(x) + \mu\psi(Q)(x)$$

Donc $\psi(\lambda P + \mu R) = \lambda\psi(P) + \mu\psi(Q)$ donc $\boxed{\psi \text{ est linéaire}}$.

3.2 $\mathrm{Im}(\psi) = \psi(\mathbb{R}_n[X]) = \psi(\mathrm{Vect}(1, X, \ldots, X^n)) = \mathrm{Vect}(\psi(1), \psi(X), \ldots, \psi(X^n)) = \mathrm{Vect}\left(X, \frac{X^2}{2}, \ldots, \frac{X^{n+1}}{n+1}\right)$
Donc $\boxed{\mathrm{Im}(\psi) = \mathrm{Vect}(X, X^2, \ldots, X^{n+1})}$.

3.3 Notons que $P \in \mathrm{Ker}(\varphi) \Leftrightarrow \int_0^1 P(t)dt = 0 \Leftrightarrow \psi(P)(1) = 0 \Leftrightarrow (X-1)|\psi(P)$.
Or, d'après la question précédente $Q \in \mathrm{Im}(\psi) \Leftrightarrow X|Q$ et $\deg(Q) \leq n+1$,
donc $P \in \mathrm{Ker}(\varphi) \Leftrightarrow X(X-1)|\psi(P)$ et $\deg(\psi(P)) \leq n+1 \Leftrightarrow \exists R \in \mathbb{R}_{n-1}[X],\ \psi(P) = RX(X-1)$.
Donc $P \in \mathrm{Ker}(\varphi) \Leftrightarrow \exists(b_0, \ldots, b_{n-1}) \in \mathbb{R}^n,\ \psi(P) = \left(\sum_{j=0}^{n-1} b_j X^j\right) X(X-1) \underset{k=j+1}{=} \sum_{k=1}^{n} b_{k-1}X^k(X-1)$
Donc $\boxed{P \in \mathrm{Ker}(\varphi) \Leftrightarrow \psi(P) \in \mathrm{Vect}(X(X-1), \ldots, X^n(X-1))}$.

3.4 Comme $\psi(P)(x) = \int_0^x P(t)dt$, en dérivant on obtient $(\psi(P))'(x) = P(x)$. Donc

$$\begin{aligned}
\psi(P) \in \mathrm{Vect}(X(X-1), \ldots, X^n(X-1)) \quad &\Rightarrow \quad \exists(c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n,\ \psi(P) = \sum_{k=1}^{n} c_k X^k(X-1) \\
&\Rightarrow \quad \exists(c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n,\ \psi(P)' = \sum_{k=1}^{n} c_k((k+1)X^k - kX^{k-1}) \\
&\Rightarrow \quad \exists(c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n,\ P = \sum_{k=1}^{n} c_k((k+1)X^k - kX^{k-1})
\end{aligned}$$

Donc, d'après la question précédente,
$P \in \mathrm{Ker}(\varphi) \Rightarrow P \in \mathrm{Vect}(2X-1, 3X^2-2X, \ldots, (n+1)X^n - nX^{n-1})$. donc
$\mathrm{Ker}(\varphi) \subset \mathrm{Vect}(2X-1, \ldots, (n+1)X^n - nX^{n-1})$. Notons $\mathcal{C} = (2X-1, \ldots, (n+1)X^n - nX^{n-1})$.
D'après la question 2.2., $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) = n = \mathrm{Card}(\mathcal{C}) \geq \dim(\mathrm{Vect}(\mathcal{C}))$.
Donc $\boxed{\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Vect}(\mathcal{C}) = \mathrm{Vect}(2X-1, \ldots, (n+1)X^n - nX^{n-1})}$.

4. 1. $\boxed{\dim(\mathcal{H}) = \dim(\mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R})) = \dim(\mathbb{R}_n[X])\dim(\mathbb{R}) = n+1}$.

4.2. Tout d'abord on constate que les ψ_k sont dans $\mathcal{H}$.
Soient $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, tels que $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k\psi_k = 0$.
Si $j < k$, $(X^j)^{(k)} = 0$ et si $j \geq k$, $(X^j)^{(k)} = \frac{j!}{(j-k)!}X^{j-k}$ donc $\psi_k(X^j) = 0$ si $j \neq k$ et $\psi_k(X^k) = 1$.
Soit $P = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j X^j$ alors notons que $\psi_k(P) = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j\psi_k(X^j) = \lambda_k$ donc

$$0 = \left(\sum_{k=0}^{n} \lambda_k\psi_k\right)(P) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k\psi_k(P) = \sum_k \lambda_k^2$$

Donc, comme une somme de termes positifs est nulle si et seulement si tous ses termes sont nuls alors $\lambda_0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$. Donc $(\psi_0, \ldots, \psi_n)$ est une famille libre de $\mathcal{H}$.

Et comme, d'après la question précédente, $\text{Card}(\psi_0, \ldots, \psi_n) = n + 1 = \dim(\mathcal{H})$ alors $\boxed{(\psi_0, \ldots, \psi_n) \text{ est une base de } \mathcal{H}}$.

4.3. D'après la question précédente, si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ alors $\psi_k(P) = a_k$ donc

$$\varphi(P) = \int_0^1 P(t)dt = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} a_k t^k \right) dt = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\psi_k(P)}{k+1}$$

Donc $\boxed{\varphi = \sum_{k=0}^{n} \frac{\psi_k}{k+1}}$.