E3A – 2019 – MP Maths 2
Corrigé

Si M est une matrice, je note $(M)_{ij}$ son coefficient situé ligne i, colonne j.

Partie I.

1.1 Soient M et N dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Alors

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(\lambda M + \mu N) &= \sum_{i=1}^{n} (\lambda M + \mu N)_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \big(\lambda (M)_{ii} + \mu (N)_{ii}\big) = \lambda \sum_{i=1}^{n} (M)_{ii} + \mu \sum_{i=1}^{n} (N)_{ii} \\ &= \lambda \operatorname{tr}(M) + \mu \operatorname{tr}(N)\end{aligned}$$

Puisque la trace prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$, c'est donc bien une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1.2 Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors $\operatorname{tr}(AB) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (AB)_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (A)_{ij}(B)_{ji}$.

La somme contient une fois et une seule chaque coefficient de A, multiplié par le coefficient de B en position symétrique par rapport à la diagonale principale. Elle contient aussi une fois et une seule chaque coefficient de B, multiplié par le coefficient de A en position symétrique ; c'est donc aussi l'expression de $\operatorname{tr}(BA)$. On a donc bien $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

1.3 Si M et N sont deux matrices semblables, on peut choisir P inversible telle que $P^{-1}MP = N$. On a alors, en utilisant la question précédente : $\operatorname{tr}(N) = \operatorname{tr}\big(P^{-1}(MP)\big) = \operatorname{tr}\big((MP)P^{-1}\big) = \operatorname{tr}(M)$.

2.1 Puisque $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et a n valeurs propres distinctes, on sait qu'elle est diagonalisable, plus précisément semblable à $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$; il existe donc bien C inversible telle que $C^{-1}AC = D$.

2.2 Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la matrice A^k est alors semblable à $D^k = \operatorname{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k)$ (puisque $D^k = (C^{-1}AC)^k = C^{-1}A^kC$ pour $k \geqslant 1$). On en déduit, pour tout k, $\operatorname{tr}(A^k) = \operatorname{tr}(D^k) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k = S_k$.

Partie II.

1. Soit $m \geqslant 1$. Alors $(X - a) \displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} a^k X^{m-1-k} = \sum_{k=0}^{m-1} \big[a^k X^{m-k} - a^{k+1} X^{m-1-k}\big] = \sum_{k=0}^{m-1} \big[P_k - P_{k+1}\big]$ en posant $P_k = a^k X^{m-k}$ pour tout k.

Par télescopage, la somme vaut donc $P_0 - P_m = X^m - a^m$, ce qui donne le résultat demandé.

2. Montrons par récurrence sur $r \in \mathbb{N}^*$ que, si $P_r = b \prod_{i=1}^{r} (X - \alpha_i)$, alors $P_r' = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} \frac{P_r}{X - \alpha_i}$.

Pour $r = 1$, $P_1' = b = P_1/(X - \alpha_1)$, le résultat est vérifié.

Supposons-le vrai à un rang r. Alors, $P_{r+1} = (X - \alpha_{r+1})P_r$, donc, en utilisant l'hypothèse de récurrence,

$$P_{r+1}' = (X - \alpha_{r+1})P_r' + P_r = \sum_{i=1}^{r} \frac{(X - \alpha_{r+1})P_r}{X - \alpha_i} + \frac{P_{r+1}}{X - \alpha_{r+1}} = \sum_{i=1}^{r+1} \frac{P_{r+1}}{X - \alpha_i}$$

ce qui achève la démonstration. Avec les notations de l'énoncé, on a donc finalement $Q' = \sum_{i=1}^{n} Q_i$.

Remarque : en supposant connus les résultats élémentaires sur les dérivées logarithmiques, la relation $Q = b_n \prod (X - \alpha_i)$ donne directement $\dfrac{Q'}{Q} = \dfrac{(b_n)'}{b_n} + \displaystyle\sum \frac{(X - \alpha_i)'}{X - \alpha_i} = \sum \frac{1}{X - \alpha_i}$.

3. Puisque $Q(\alpha_i) = 0$, on a bien $Q_i = \big(Q - Q(\alpha_i)\big)/(X - \alpha_i)$. On en déduit

$$Q_i = \sum_{k=0}^{n} b_k \frac{X^k - \alpha_i^k}{X - \alpha_i} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=0}^{k-1} b_k \alpha_i^j X^{k-1-j} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{r=1}^{k} b_k \alpha_i^{k-r} X^{r-1}$$

en posant $r = k - j$.

La somme porte sur l'ensemble des couples (k,r) vérifiant $1 \leqslant k \leqslant n$ (le terme pour $k=0$ valait 0) et $1 \leqslant r \leqslant k$. C'est aussi l'ensemble des couples (k,r) vérifiant $1 \leqslant r \leqslant n$ et $r \leqslant k \leqslant n$, on peut donc écrire

$$Q_i = \sum_{r=1}^{n} \sum_{k=r}^{n} b_k \alpha_i^{k-r} X^{r-1}$$

ce qui constitue le résultat demandé puisque le terme X^{r-1}, indépendant de k, peut être sorti de la somme intérieure.

4. Soit $r \in [\![1,n]\!]$. Le nombre rb_r est le coefficient de X^{r-1} dans le polynôme $Q' = \sum_{i=1}^n Q_i$.
Pour $i \in [\![1,n]\!]$, la question précédente montre que le coefficient de X^{r-1} dans Q_i est $\sum_{k=r}^n b_k \alpha_i^{k-r}$. On a donc

$$rb_r = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=r}^{n} b_k \alpha_i^{k-r} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{n-r} b_{j+r} \alpha_i^{j} = \sum_{j=0}^{n-r} \left(b_{j+r} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^j \right) = \sum_{j=0}^{n-r} b_{j+r} T_j$$

où l'on a successivement posé $j = k-r$ dans la somme interne, puis permuté les sommes (bornes fixes).

5. Écrivons la relation précédente avec $r = n-k$ (qui appartient bien à $[\![1,n-1]\!]$). On obtient $(n-k)b_{n-k} = \sum_{j=0}^{k-1} b_{n+j-k} T_j + b_n T_k$, et donc $T_k = \dfrac{(n-k)b_{n-k}}{b_n} - \dfrac{1}{b_n} \displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} b_{n+j-k} T_j$.

6.1 Soit $i \in [\![1,n]\!]$. On a $\sum_{j=0}^n b_j \alpha_i^j = 0$ par définition de α_i, et donc $\sum_{j=0}^n b_j \alpha_i^{k-n+j} = 0$ en multipliant par α_i^{k-n}.
En additionnant les n égalités obtenues quand i décrit $[\![1,n]\!]$, on obtient bien $\sum_{j=0}^n b_j T_{k-n+j} = 0$.

6.2 En isolant le terme d'indice n, cette relation donne $T_k = -\dfrac{1}{b_n} \displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} b_j T_{k-n+j} = -\dfrac{1}{b_n} \sum_{r=1}^{n} b_{n-r} T_{k-r}$ en posant $r = n-j$, ce qui fournit bien la relation demandée.

7. La relation obtenue en **5** permet de calculer les termes T_k pour $k \in [\![1,n-1]\!]$. La question **6** montre qu'à partir du rang n, la suite (T_n) vérifie une relation de récurrence linéaire à coefficients constants, qui permet de calculer successivement ces nombres.

Partie III.

1. Le système peut s'écrire $AU = B$, où $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -S_1 \\ \vdots \\ -S_n \end{pmatrix}$, et $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ S_1 & 2 & \ddots & & \vdots \\ S_2 & S_1 & 3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ S_{n-1} & \cdots & \cdots & S_1 & n \end{pmatrix}$.

La matrice A est triangulaire inférieure, et ses coefficients diagonaux sont tous non nuls, donc elle est inversible. Le système a donc une et une seule solution, donnée par $U = A^{-1}B$.

2. La première équation donne $u_1 = -S_1 = -\sum_{i=1}^n \lambda_i$. Puisque le polynôme P est unitaire, les relations entre coefficients et racines donnent bien $S_1 = -a_{n-1}$, soit $u_1 = a_{n-1}$.
La deuxième équation, $S_1 u_1 + 2u_2 = -S_2$, donne alors $u_2 = (S_1^2 - S_2)/2 = \sum_{i<j} \lambda_i \lambda_j$. Encore une fois, les relations entre coefficients et racines donnent $u_2 = a_{n-2}$.

3. Appliquons les résultats de la partie **II**, avec P comme polynôme Q. On peut donc prendre $\alpha_i = \lambda_i$ pour tout i, d'où $T_j = S_j$ pour tout j ; enfin, $b_n = 1$ et $b_k = a_k$ pour tout $k \in [\![0,n-1]\!]$. Fixons $k \in [\![1,n]\!]$.

La question **II.5** donne $S_k = (n-k)a_{n-k} - \displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} a_{n-(k-j)} S_j = (n-k)a_{n-k} - \sum_{j=1}^{k-1} a_{n-(k-j)} S_j - n a_{n-k}$

en isolant le terme d'indice 0 dans la somme.
Cette relation traduit bien le fait que le k-uplet $(u_1, \ldots, u_k) = (a_{n-1}, \ldots, a_{n-k})$ vérifie l'équation k du système précédent. Par suite, $(a_{n-1}, \ldots, a_0)$ est solution de (Σ).

4. L'unicité de la solution établie en **1** montre alors que $u_k = a_{n-k}$ pour tout k.

Partie IV.

1. Le polynôme caractéristique de A est unitaire, de degré n, et admet comme racines les valeurs propres de A : ce ne peut donc être que P. Le théorème de Cayley-Hamilton fournit alors $P(A) = 0$.

2. On sait que la matrice A est inversible si et seulement si son noyau est réduit à $\{0\}$, ce qui équivaut à dire que 0 n'est pas valeur propre de A, ce qui équivaut à $P(0) \neq 0$ puisque $P = \chi_A$, soit finalement $a_0 \neq 0$.

3. Supposons A inversible, donc $a_0 \neq 0$. D'après la question **1**, on a $A^n + \sum_{k=1}^{n-1} a_k A^k + a_0 I_n = 0$, donc $A \times \left[\dfrac{-1}{a_0} \left(A^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} a_k A^{k-1} \right) \right] = I_n$. Cela prouve que la matrice entre crochets est A^{-1} ; et c'est bien un polynôme en A, les $k-1$ étant dans $\mathbb{N}$.

4.1 On raisonne par récurrence sur k. Pour $k = 1$, la relation à prouver est $B_1 = A + d_1 I_n$, qui est la définition de B_1. En supposant la relation vraie jusqu'à un rang $k - 1 \in [\![1, n-1]\!]$, on a

$$B_k = \left(A^{k-1} + \sum_{i=1}^{k-1} d_i A^{k-1-i} \right) A + d_k I_n = A^k + \sum_{i=1}^{k-1} d_i A^{k-i} + d_k I_n = A^k + \sum_{i=1}^{k} d_i A^{k-i}$$

ce qui achève la récurrence.

4.2 Cela donne en particulier, pour $k \in [\![2, n]\!]$, $B_{k-1}A = B_k - d_k I_n = A^k + \sum_{i=1}^{k-1} d_i A^{k-i}$. En appliquant la trace (linéaire) aux deux membres de cette équation, on obtient $\operatorname{tr}(B_{k-1}A) = \operatorname{tr}(A^k) + \sum_{i=1}^{k-1} d_i \operatorname{tr}(A^{k-i})$ d'où l'on tire immédiatement la relation demandée.

4.3a On a vu en **I.2.2** que, pour tout k, $\operatorname{tr}(A^k) = \operatorname{tr}(D^k) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k = S_k$. Les relations obtenues à la question précédente peuvent alors se réécrire $S_k + \sum_{i=1}^{k-1} d_i S_{k-i} + k d_k = 0$ pour $k \in [\![2, n]\!]$, et la définition de d_1 donne $S_1 + d_1 = 0$.

Tout cela montre que $(d_1, \ldots, d_n)$ est solution du système (Σ) étudié en **III** ; d'après **III.4**, on a donc bien $d_k = a_{n-k}$ pour tout k.

4.3b La question **4.1** donne $B_{n-1} = A^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} a_{n-i} A^{n-1-i} = A^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} a_k A^{k-1}$. D'après la question **3**, si A est inversible, alors $B_{n-1} = -a_0 A^{-1}$. Sinon, $a_0 = 0$, et $B_{n-1}A = P(A) - a_0 I_n = 0$. Que dire de plus dans ce cas ?

4.3c On a $B_n = P(A) = 0$. Quelqu'un de plus malin que moi l'aura sûrement vu venir depuis longtemps.

5. On a $d_1 = -\operatorname{tr} A = -1$, d'où $B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ puis $B_1 A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$; on en tire $d_2 = -7$.

L'énoncé fournit $B_2 A$, qui donne $d_3 = -\operatorname{tr}(B_2 A)/3 = 1$. On a donc $B_3 = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & -4 \\ 4 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. La question **4.3** donne $B_3 A = -a_0 I_4$; il suffit donc de calculer un coefficient diagonal de $B_3 A$ pour avoir $a_0 = d_4$. On trouve $a_0 = d_4 = 8$ (et on peut vérifier $B_3 A = -8 I_4$).

On a donc $A^{-1} = -B_3/8$, et $\chi_A = X^4 + \sum_{k=0}^{3} d_{4-k} X^k = X^4 - X^3 - 7X^2 + X + 8$.

6.1 `f1` : prend un couple (A, B) de matrices (=listes de listes) carrées et retourne le produit AB ;

`f2` : prend un flottant x et un entier n et retourne $x I_n$;

`f3` : prend une matrice carrée et retourne sa trace ;

`f4` : prend une matrice carrée A et un flottant x et retourne xA ;

`f5` : prend un couple de matrices carrées de même taille et retourne leur somme.

6.2 Dans la définition des suites (d_k) et (B_k), on peut prendre $B_0 = I_n$, les relations de récurrence fournies pour $k \in [\![2, n]\!]$ étant alors encore vraies pour $k = 1$.

On peut alors compléter le programme donné par les lignes suivantes :

```
B = f2(1,n)                # B_0 = I_n
for k in range(n) :
    C = f1(B,A)            # calcul de B_{k-1}A
    dk = -f3(C)/k          # calcul de d_k
    B = f5(C,f2(dk,n))     # calcul de B_k
    d.append(dk)           # ajout de d_k à la liste d
```

Dixit F.P. : “on peut éviter de calculer le dernier B_k, mais cela alourdirait le code.”

Rédigé par G. Deyris, relu par C. Bonnefont et F. Pompigne, que je remercie.