`Calculatrices interdites`

On note $\mathbb{R}[X]$ la $\mathbb{R}-$ algèbre des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$. Pour tout polynôme P, on note P′ son polynôme dérivé.

Étant donné un entier naturel n, $[\![0,n]\!]$ désigne l'ensemble des entiers naturels compris entre 0 et n.

Partie I.

Soit φ l'application :

$$\varphi \ : \ \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & P - P' \end{array} \right.$$

Soit n un entier naturel non nul. On note $\mathbb{R}_n[X]$ le $\mathbb{R}-$espace vectoriel des polynômes de degré $\leqslant n$.

1. Démontrer que φ induit sur $\mathbb{R}_n[X]$ un endomorphisme. On note φ_n cet endomorphisme.
2. Expliciter la matrice de φ_n sur la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de φ_n. L'endomorphisme φ_n est-il diagonalisable ?
4. Démontrer que φ_n est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
5. En déduire qu'il existe une unique famille de polynômes $s_0, s_1, \dots, s_n$ telle que :
   (a) $\forall i \in [\![0,n]\!],\ \varphi_n(s_i) = \frac{X^i}{i!}$,
   (b) $(s_0, s_1, \dots, s_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
6. On note Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}_n[X]$ et δ l'endomorphisme induit par la dérivation sur le $\mathbb{R}-$espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$. Justifier :
$$(\mathrm{Id} - \delta) \circ (\mathrm{Id} + \delta + \cdots + \delta^n) = \mathrm{Id}$$
7. En déduire l'expression de s_i en fonction de X, pour tout i dans $[\![0,n]\!]$.

Dans le reste du problème, on considère les deux familles de polynômes $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_n(X) = 1 + \frac{X}{1!} + \cdots \frac{X^n}{n!} = \sum_{i=0}^{n} \frac{X^i}{i!}$$

$$T_n(X) = S_n(nx)$$

Dans les parties II, III et IV, on admettra le résultat suivant qui est démontré indépendamment dans la partie V :

Soit n un entier naturel $\geqslant 2$. Toutes les racines complexes du polynôme S_n ont un module $< n$.

Partie II.

8. Donner le tableau de variations de S_3. Représenter sur un même graphique les courbes des fonctions S_1, S_3 ainsi que la fonction exponentielle $(x \mapsto e^x)$ en s'attachant à respecter la position relative de ces trois courbes.
9. Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que le polynôme S_n n'a pas de racine réelle si n est pair et a une unique racine réelle simple si n est impair. (*Indication : On pourra faire une démonstration par récurrence.*)

Dans la suite du problème, on note α_n l'unique racine réelle de S_n, pour tout entier naturel **impair** n.

10. On se propose d'étudier le comportement de la suite $(\alpha_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
    (a) Justifier que la suite $(\alpha_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. (*Indication : On pourra étudier le signe de* $\mathrm{S}_{2n+1}(\alpha_{2n-1})$.)
    (b) Soit $(v_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels qui converge vers un nombre réel ℓ.
        i. Soit ε un nombre réel > 0. Justifier qu'il existe un entier naturel M tel que :

$$\forall m \in \mathbb{N},\ m > \mathrm{M} \Rightarrow |\mathrm{S}_m(v_m) - \mathrm{e}^{v_m}| < \varepsilon.$$

        ii. En déduire que la suite $(\mathrm{S}_m(v_m))_{m\in\mathbb{N}}$ converge vers e^{ℓ}.
    (c) En déduire que la suite $(\alpha_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$.

Partie III.

Soit h la fonction de la variable réelle x définie par :

$$h(x) = x\mathrm{e}^{1-x}.$$

11. Étudier la fonction h. Représenter son graphe sur $\mathbb{R}$.
12. Démontrer qu'il existe une fonction g de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $]-\infty, 1[$ dans $]-\infty, 1[$ telle que :

$$\forall x \in]-\infty, 1[,\ h(g(x)) = x.$$

    Représenter le graphe de g. L'étude précise de g n'est pas demandée.
13. Démontrer qu'il existe un unique nombre réel ρ tel que $h(\rho) = -1$.
14. Démontrer que ρ est dans l'intervalle $]-1/2, -1/4[$. *Indication : on pourra utiliser le fait que* $\ln 2 \geqslant \frac{13}{20}$.
15. Soit z un nombre complexe tel que : $|z| \leqslant 1$ et $|z\mathrm{e}^{1-z}| \leqslant 1$. Soit n un entier naturel.
    (a) Justifier l'égalité :

$$1 - \mathrm{e}^{-nz}\mathrm{T}_n(z) = (z\mathrm{e}^{1-z})^n \mathrm{e}^{-n} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n^k}{k!} z^{k-n}.$$

    (b) En déduire que :

$$\left|1 - \mathrm{e}^{-nz}\mathrm{T}_n(z)\right| \leqslant 1 - \mathrm{e}^{-n}\mathrm{T}_n(1).$$

    (c) En déduire que $\mathrm{T}_n(z) \neq 0$.
16. Soit n un entier naturel impair $\geqslant 3$. Démontrer que α_n est dans l'intervalle $]-n, n\rho[$.

Partie IV.

Pour tout entier naturel m, on pose $\gamma_{2m+1} = \alpha_{2m+1}/(2m+1)$.

17. Démontrer que pour tout nombre réel u et tout entier naturel n, on a :

$$\mathrm{e}^{-u}\mathrm{S}_n(u) = 1 + \frac{1}{n!}\int_u^0 t^n \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t.$$

18. Soit m une entier naturel. On note $n = 2m+1$. Justifier l'égalité :

$$\int_{\gamma_n}^0 h(t)^n \mathrm{d}t = -\frac{n!\mathrm{e}^n}{n^{n+1}}.$$

19. En déduire que la suite $\left(\displaystyle\int_{\gamma_{2m+1}}^{0} h(t)^{2m+1}\mathrm{d}t\right)_{m\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente et expliciter sa limite.
20. Démontrer que $\left(\displaystyle\int_{\gamma_{2m+1}}^{\rho} h(t)^{2m+1}\mathrm{d}t\right)_{m\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente et expliciter sa limite.
21. Déterminer un équivalent de α_{2m+1}.

Partie V.

Cette partie a pour but de démontrer le résultat admis dans les parties précédentes : Si n est un entier naturel $\geqslant 2$, les racines complexes du polynôme S_n ont un module $< n$.

22. Soit p un entier naturel non nul. Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ des nombres complexes de module $\leqslant 1$. Soient $\theta_1, \ldots, \theta_p$ des nombres réels > 0. On suppose que $\displaystyle\left|\sum_{i=1}^{p} \theta_i\alpha_i\right| = \sum_{i=1}^{p} \theta_i$.
    (a) Démontrer que $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ sont des nombres complexes de module exactement 1.
    (b) On suppose dans cette question seulement $p = 2$ et $\alpha_1 = 1$. Soit t un nombre réel tel que $\alpha_2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$. En développant $\left|\theta_1 + \theta_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right|^2$, justifier que $\alpha_2 = 1$.
    (c) Dans le cas général, démontrer que $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_p$.
23. Soit P dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ de degré $n \geqslant 2$. On note $a_0, \ldots, a_n$ ses coefficients :
$$\mathrm{P}(\mathrm{X}) = a_n\mathrm{X}^n + a_{n-1}\mathrm{X}^{n-1} + \cdots + a_1\mathrm{X} + a_0.$$
On suppose que $a_0 = a_1 > a_2 > \cdots > a_{n-1} > a_n > 0$.
    (a) Justifier que ni 0, ni 1, ne sont des racines de P.
    (b) Déterminer les coefficients du polynôme $(\mathrm{X}-1)\mathrm{P}(\mathrm{X})$.
    (c) Démontrer que les racines complexes de P ont un module > 1. *Indication : on pourra raisonner par l'absurde et utiliser la question 22c.*
24. Soit Q dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ de degré $n \geqslant 2$. Soient $a_0, \ldots, a_n$ ses coefficients :
$$\mathrm{Q}(\mathrm{X}) = a_n\mathrm{X}^n + a_{n-1}\mathrm{X}^{n-1} + \cdots + a_1\mathrm{X} + a_0.$$
On suppose que $0 < a_0 < a_1 < \cdots a_{n-2} < a_{n-1} = a_n$. Justifier que les racines complexes de Q ont un module < 1.
25. Conclure.