

Partie I.

1. Endomorphisme

- Il est clair que $\forall P \in \mathbb{R}[X], \varphi(P) \in \mathbb{R}[X]$.
 - φ linéaire : on voit facilement que $\forall P, Q \in \mathbb{R}[X], \forall \lambda \in \mathbb{R}, \varphi(\lambda P + Q) = \lambda\varphi(P) + \varphi(Q)$.
- Ainsi φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

Satabilité Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Montrons $\varphi(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.

On a $\deg P \leq n$ donc $\deg(P') \leq n$

Ainsi $\deg(P - P') = \deg(\varphi(P)) \leq n$ d'où le résultat

Ainsi $\mathbb{R}_n[X]$ stable par φ .

On en déduit que φ induit sur $\mathbb{R}_n[X]$ un endomorphisme

2. La matrice de φ_n sur la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & -n \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$$

3. Le polynôme caractéristique de φ est $\chi_\varphi = (X - 1)^{n+1}$ (matrice triangulaire)

donc le spectre de φ_n est $\{1\}$.

On trouve facilement que $\text{rg}(\text{Id}_{\mathbb{R}_n[X]} - \varphi_n) = \text{rg}(I_{n+1} - \mathcal{M}(\varphi_n)) = n$.

donc selon le théorème du rang : $\dim(E_1(\varphi_n)) = 1$ or $\varphi_n(1) = 1$

de plus $\sum_{\lambda \in \text{Sp}(\varphi_n)} \dim(E_\lambda(\varphi_n)) = 1$ et $\dim \mathbb{R}_n[X] = n + 1 > 1$

ainsi la seule valeur propre de φ_n est et le sous-espace propre est $E_1(\varphi_n) = \text{Vect}(1)$
ainsi l'endomorphisme φ_n n'est pas diagonalisable

4. À l'aide de la matrice de φ_n , on trouve que $\det(\varphi_n) = 1 \neq 0$

ainsi φ_n est un automorphisme de l'espace de dimension finie $\mathbb{R}_n[X]$

5. Comme φ est un automorphisme, on a pour $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et $x \in \mathbb{R}_n[X]$,

$$\varphi_n(x) = \frac{X^i}{i!} \text{ si et seulement si } x = \varphi_n^{-1} \left(\frac{X^i}{i!} \right)$$

ceci nous donne l'existence et l'unicité de s_0, s_1, \dots, s_n telle que : $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \varphi_n(s_i) = \frac{X^i}{i!}$

De plus $\left(\frac{X^0}{0!}, \frac{X^1}{1!}, \dots, \frac{X^n}{n!} \right)$ est une famille échelonnée donc libre constituée de $n + 1$ vecteurs

comme $\dim \mathbb{R}_n[X] = n + 1$, alors $\left(\frac{X^0}{0!}, \frac{X^1}{1!}, \dots, \frac{X^n}{n!} \right)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$

l'image d'une base par l'automorphisme φ_n^{-1} étant une base, on en déduit que

il existe une unique famille de polynômes s_0, s_1, \dots, s_n telle que :

(a) $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \varphi_n(s_i) = \frac{X^i}{i!},$

(b) (s_0, s_1, \dots, s_n) est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

6. On a $(\text{Id} - \delta) \circ (\text{Id} + \delta + \dots + \delta^n) = (\text{Id} + \delta + \dots + \delta^n) - (\delta + \delta^2 + \dots + \delta^{n+1}) = \text{Id} - \delta^{n+1}$

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

Par récurrence immédiate, on a : $\forall k \in \mathbb{N}, \deg(\delta^k(P)) \leq -k + \deg P$

donc $\deg(\delta^{n+1}(P)) \leq -1$ et ainsi $(\delta^{n+1}(P)) = 0$

on a donc bien $(\text{Id} - \delta) \circ (\text{Id} + \delta + \dots + \delta^n) = \text{Id}$

7. On déduit de la question précédente que $\varphi_n \circ (\text{Id} + \delta + \dots + \delta^n) = \text{Id}$

Comme φ_n est endomorphisme d'un espace de dimension finie alors $\varphi_n^{-1} = \text{Id} + \delta + \dots + \delta^n$

donc pour i dans $\llbracket 0, n \rrbracket$, on a $s_i = \varphi_n^{-1}\left(\frac{X^i}{i!}\right) = (\text{Id} + \delta + \dots + \delta^n)\left(\frac{X^i}{i!}\right) = (\text{Id} + \delta + \dots + \delta^i)\left(\frac{X^i}{i!}\right)$

On en déduit $s_i = 1 + \frac{X}{1!} + \dots + \frac{X^i}{i!} = \sum_{j=0}^i \frac{X^j}{j!}$

Partie II.

On obtient les limites des fonctions polynomiales en $\pm\infty$ à l'aide des termes de plus haut degré.

8. On a $S'_3 = S_2 = 1 + X + \frac{X^2}{2}$ dont le discriminant vaut -1 .

Soit $x \in \mathbb{R}$.

Par inégalité de convexité : $S_1(x) = 1 + x \leq e^x$ et par habitude : $S_1(x) = e^x \iff x = 0$

On a $S_3(x) - S_1(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} = \frac{x^2}{6}(3 + x)$

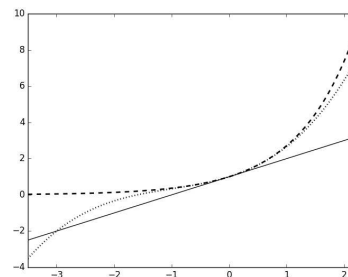
donc $(S_3(x) = S_1(x) \iff x = 0 \text{ ou } x = -3) \text{ et } (S_3(x) < S_1(x) \iff x < -3)$

Étudions $\varphi = \exp - S_3$, on a $\varphi' = \exp - S_2$ et $\varphi'' = \exp - S_1$ qui est positive avec un seul point d'annulation donc φ' est strictement croissante et $\varphi'(0) = 0$ donc φ' est du signe (strict) de x

donc φ est strictement décroissante (respectivement croissante) sur $] -\infty, 0]$ (respectivement sur $[0, +\infty[$)

donc $\exp(x) \geq S_3(x) \text{ et } \exp(x) \geq S_1(x) \text{ avec égalités si et seulement si } x = 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$S'_3(x)$		+
S_3	$-\infty$	$+\infty$



9. On va montrer par récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}$, la propriété \mathcal{P}_n :

« S_n n'a pas de racine réelle si n est pair et a une unique racine réelle simple si n est impair. »

Initialisation : Pour $n \in \{0, 1\}$, la propriété \mathcal{P}_n est vérifiée facilement.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on ait \mathcal{P}_p . Montrons que \mathcal{P}_{n+1} .

Si $n + 1$ est impair, alors n est pair

Dans ce cas S_n ne s'annule pas sur \mathbb{R} par hypothèse et $\lim_{x \rightarrow +\infty} S_n(x) = +\infty$

par le théorème des valeurs intermédiaires, $\forall x \in \mathbb{R}, S'_{n+1}(x) = S_n(x) > 0$ car S_n est continue sur \mathbb{R} donc S_{n+1} est strictement croissante sur \mathbb{R} de plus $\lim_{x \rightarrow +\infty} S_{n+1}(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} S_{n+1}(x) = -\infty$

La fonction S_{n+1} étant continue, elle est donc bijective de \mathbb{R} vers \mathbb{R} , elle admet alors une unique racine.

Comme S'_{n+1} n'admet pas de racine réelle, la seule racine de S_{n+1} est simple.

Si $n + 1$ est pair, alors n est impair dans ce cas S_n ne s'annule qu'en un seul point noté α

Comme il s'agit d'une racine simple, S_n change de signe en α ; de plus $\lim_{x \rightarrow +\infty} S_n(x) = +\infty$

donc $\forall x > \alpha$, $S_n(x) = S'_{n+1}(x) > 0$ et $\forall x < \alpha$, $S_n(x) = S'_{n+1}(x) < 0$

donc S_{n+1} est strictement décroissante sur $] -\infty, \alpha[$ et strictement croissante sur $[\alpha, +\infty[$

ainsi S_{n+1} admet donc un minimum en α

de plus $S_{n+1}(\alpha) = S_n(\alpha) + \frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)!} > 0$ car $n+1$ pair et $\alpha \neq 0$ car $S_n(0) = 1$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $S_{n+1}(x) \geq S_{n+1}(\alpha) > 0$ d'où S_{n+1} n'admet pas de racine

Conclusion : On a montré par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, \mathcal{P}_n

Soit $n \in \mathbb{N}$.

le polynôme S_n n'a pas de racine réelle si n est pair et a une unique racine réelle simple si n est impair

10. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\text{On a } S_{2n-1}(X) = \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{X^k}{k!} = \sum_{p=0}^{n-1} \left(\frac{X^{2p}}{(2p)!} + \frac{X^{2p+1}}{(2p+1)!} \right) = \sum_{p=0}^{n-1} \frac{X^{2p}(2p+1+X)}{(2p+1)!}$$

$$\text{donc } S_{2n-1}(-2n-1) = \sum_{p=0}^{n-1} \frac{(2n+1)^{2p}(2p-2n)}{(2p+1)!} \leq 0 \text{ donc } -2n-1 \leq \alpha_{2n-1} \text{ (admis par l'énoncé)}$$

$$\text{De plus : } S_{2n+1}(\alpha_{2n-1}) = S_{2n-1}(\alpha_{2n-1}) + \frac{\alpha_{2n-1}^{2n}}{(2n)!} + \frac{\alpha_{2n-1}^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{\alpha_{2n-1}^{2n}(2n+1+\alpha_{2n-1})}{(2n+1)!}$$

donc $S_{2n+1}(\alpha_{2n-1}) \geq 0$ d'où $\alpha_{2n-1} \geq \alpha_{2+1}$

ainsi la suite $(\alpha_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante

(b) i. Comme toute suite convergente est bornée, ceci nous fournit $K > 0$, tel que $\forall m \in \mathbb{N}$, $v_m \in [-K, K]$

La série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$ converge uniformément sur tout segment inclus dans l'intervalle ouvert de convergence ici \mathbb{R}

donc la suite de fonction polynomiale $(S_m)_m$ converge uniformément sur $[-K, K]$ vers exp

ceci nous fournit $M \in \mathbb{N}$, tel que $\forall m \geq M$, $\forall x \in [-K, K]$, $|S_m(x) - e^x| \leq \varepsilon$

en particulier $\forall m \geq M$, $\forall m \in \mathbb{N}$, $|S_m(v_m) - e^{v_m}| \leq \varepsilon$

ii. On vient de montré que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists M \in \mathbb{N}$, $\forall m \in \mathbb{N}$, $m > M \Rightarrow |S_m(v_m) - e^{v_m}| < \varepsilon$

ce qui signifie : $S_m(v_m) - e^{v_m} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Comme exp est continue, on a $e^{v_m} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^\ell$

Par somme $S_m(v_m) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^\ell$

on en déduit que la suite $(S_m(v_m))_{m \in \mathbb{N}}$ converge vers e^ℓ

(c) La suite $(\alpha_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ étant décroissante, elle admet donc une limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$

Par l'absurde, si on avait $\ell \neq -\infty$, la suite $(\alpha_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ serait convergente vers ℓ

donc $(S_{2n+1}((\alpha_{2n+1})))_{n \in \mathbb{N}}$ convergerait vers $e^\ell > 0$ d'après (b)

or il s'agit de la suite identiquement nulle

Absurde On en déduit que la suite $(\alpha_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$

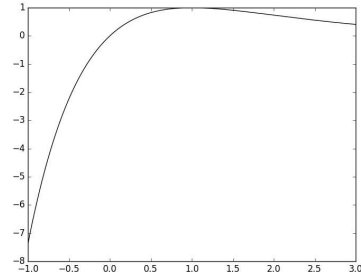
Partie III.

11. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $h'(x) = (1-x)e^{1-x}$ qui est du signe de $(1-x)$

La limite en $-\infty$ s'obtient par produit celle en $+\infty$ par la croissance comparée $te^t \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} 0$

Ce qui donne :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$h'(x)$	$+$	0	$-$
h	$-\infty$	1	0



Ci-contre une représentation de h :

12. La fonction h est continue et strictement croissante sur $] -\infty, 1[$ de plus $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\infty$ donc

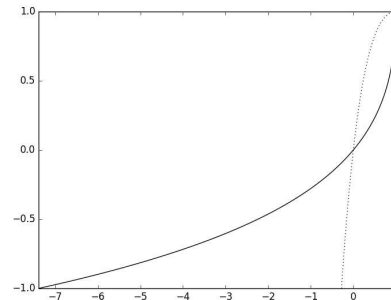
h induit une bijection de $] -\infty, 1[$ vers $] -\infty, 1[$

On pose g la bijection réciproque qui est continue et strictement croissante

De plus h est de classe \mathcal{C}^∞ et h' ne s'annule pas sur $] -\infty, 1[$

donc g de classe \mathcal{C}^∞ de $] -\infty, 1[$ dans $] -\infty, 1[$ vérifiant $\forall x \in] -\infty, 1[, h(g(x)) = x$

Le graphe de g est obtenu en échangeant tableaux des abscisses et ordonnées utilisées pour h . En pointillés, la courbe de la restriction de h .



13. Comme h induit une bijection de $] -\infty, 1[$ vers $] -\infty, 1[$, il existe un unique $\rho \in] -\infty, 1[$ tel que $h(\rho) = -1$.

De plus $\forall x \geq 1, h(x) > 0$ ainsi il existe un unique nombre réel ρ tel que $h(\rho) = -1$

14. $h(-1/2) = -\frac{e^{3/2}}{2}$ donc $\ln(-h(-1/2)) = \frac{3}{2} - \ln(2) > 1 - \ln(2) > 0$ car $2 \leq e$

donc $-h(-1/2) > 1$ d'où $h(-1/2) < -1 = h(\rho)$

comme h est strictement croissante sur $] -\infty, 1[$ alors $-1/2 < \rho$

d'un autre côté $h(-1/4) = -\frac{e^{5/4}}{4}$

donc $\ln(-h(-1/4)) = \frac{5}{4} - 2\ln(2) \leq \frac{5}{4} - \frac{26}{20} = -\frac{1}{20} < 0$ car $\ln 2 \geq \frac{13}{20}$

donc $h(-1/4) > h(\rho)$

On a bien ρ dans l'intervalle $] -1/2, -1/4[$

15. (a) Comme $e^{nz} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(nz)^k}{k!}$, par définition sur \mathbb{C} de l'exponentielle;

on a l'existence de $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n^k}{k!} z^{k-n}$ car $z^n \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n^k}{k!} z^{k-n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n^k}{k!} z^k$ d'où

$$(ze^{1-z})^n e^{-n} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n^k}{k!} z^{k-n} = e^{-nz} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n^k}{k!} z^k = e^{-nz} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(nz)^k}{k!}$$

et

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(nz)^k}{k!} = e^{nz} - \sum_{k=0}^n \frac{(nz)^k}{k!} = e^{nz} - \sum_{k=0}^n \frac{(nz)^k}{k!} = e^{nz} - S_n(nz)$$

On a bien l'égalité :
$$1 - e^{-nz}T_n(z) = 1 - e^{-nz}S_n(nz) = (ze^{1-z})^n e^{-n} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n^k}{k!} z^{k-n}$$

(b) Pour $k \geq n+1$, on a $\left| \frac{n^k}{k!} z^{k-n} \right| \leq \frac{n^k}{k!}$

et $\sum_{k \geq n+1}^{+\infty} \frac{n^k}{k!}$ est une série convergente (en prenant $z = 1$ dans la question précédente)

donc à l'aide de la question précédente et comme $|ze^{1-z}| \leq 1$ et $|z| \leq 1$:

$$|1 - e^{-nz}T_n(z)| = |ze^{1-z}|^n e^{-n} \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n^k}{k!} z^{k-n} \right| \leq e^{-n} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n^k}{k!} |z|^{k-n} \leq e^{-n} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n^k}{k!}$$

On obtient :
$$|1 - e^{-nz}T_n(z)| \leq 1 - e^{-n}T_n(1)$$
 car $1 - e^{-n}T_n(1) = (1e^{1-1})^n e^{-n} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n^k}{k!} 1^{k-n}$

(c) Par l'absurde si on avait $T_n(z) = 0$, on aurait $1 \leq 1 - e^{-n}T_n(1)$ d'après la question précédente donc $e^{-n}T_n(1) \leq 0$ donc $T_n(1) \leq 0$ ce qui est absurde

On en déduit que $T_n(z) \neq 0$

16. En reprenant le calcul du 10.(a), on a pour $m \in \mathbb{N}$: $S_{2m+1}(X) = \sum_{p=0}^m \left(\frac{X^{2p}}{(2p)!} + \frac{X^{2p+1}}{(2p+1)!} \right)$

Donc $S_{2m+1}(-2m-1) = \sum_{p=0}^m \frac{(2m+1)^{2p}}{(2p+1)!} (2p+1-2m-1)$

donc pour n impair, on a $S_n(-n) < 0$ donc $-n < \alpha_n$ (admis par l'énoncé et vu en 10. !)

ainsi $-n < \alpha_n < 0$ en utilisant les variations de S_n de la partie II or $0 = S_n(\alpha_n) = T_n(\alpha_n/n)$

donc d'après la contraposée de la question 15 : $|\alpha_n/n| > 1$ ou $|\alpha_n/n \exp(1 - \alpha_n/n)| > 1$

ainsi $|\alpha_n| > n$ ou $|h(\alpha_n/n)| > 1$

donc $|h(\alpha_n/n)| > 1$ et ainsi $h(\alpha_n/n) < -1 = h(\rho)$ car $-1 < \alpha_n/n < 0$

donc $\alpha_n/n < \rho$ d'où $\alpha_n \in]-n, n\rho[$

Partie IV.

17. La fonction \exp est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .

On peut donc utiliser la formule de Taylor avec reste intégrale : à l'ordre n . Soit $u \in \mathbb{R}$. On a

$$\exp(0) = \sum_{k=0}^n \frac{\exp^{(k)}(-u)}{k!} (0+u)^k + \int_{-u}^0 \frac{(0-t)^n}{n!} \exp^{(n+1)}(t) dt$$

donc $1 = e^{-u} \sum_{k=0}^n \frac{u^k}{k!} + \int_{-u}^0 \frac{(-t)^n}{n!} e^t dt$

On effectue dans l'intégrale le changement de variable de classe \mathcal{C}^1 : $x = -t$; $dx = -dt$

ainsi $1 = e^{-u} S_n(u) - \int_u^0 \frac{x^n}{n!} e^{-x} dx$ d'où
$$e^{-u} S_n(u) = 1 + \frac{1}{n!} \int_u^0 t^n e^{-t} dt$$

18. En utilisant la question précédente en $u = \alpha_n$, on a : $0 = 1 + \frac{1}{n!} \int_{\alpha_n}^0 x^n e^{-x} dx$

Comme $\alpha_n/n = \gamma_n$, on effectue le changement de variable de classe \mathcal{C}^1 : $nt = x$; $ndt = dx$

donc $n \frac{1}{n!} \int_{\gamma_n}^0 (nt)^n e^{-nt} dt = -1$ et ainsi $-1 = \frac{n^{n+1}}{n!} \int_{\gamma_n}^0 (te^{-t})^n dt$ d'où $\int_{\gamma_n}^0 h(t)^n dt = -\frac{n!e^n}{n^{n+1}}$

19. Quand $m \rightarrow +\infty$, on pose $n = 2m + 1$ et $n \rightarrow +\infty$ et Stirling nous dit que : $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$

donc $\int_{\gamma_n}^0 h(t)^n dt \sim -\sqrt{\frac{2\pi}{n}}$ et $-\sqrt{\frac{2\pi}{n}} \rightarrow 0$. D'où la suite $\left(\int_{\gamma_{2m+1}}^0 h(t)^{2m+1} dt\right)_{m \in \mathbb{N}}$ converge vers 0

20. Pour $t \in]-\infty, 0]$, $h(t) \leq 0$ donc $h(t)^{2m+1} \leq 0$ et $\gamma_{2m+1} \leq \rho \leq 0$ (voir 16 et 14)

Ainsi les trois intégrales de la relation de Chasles sont négatives :

$$\int_{\gamma_{2m+1}}^0 h(t)^{2m+1} dt = \int_{\gamma_{2m+1}}^{\rho} h(t)^{2m+1} dt + \int_{\rho}^0 h(t)^{2m+1} dt$$

d'où $\int_{\gamma_{2m+1}}^0 h(t)^{2m+1} dt \leq \int_{\gamma_{2m+1}}^{\rho} h(t)^{2m+1} dt \leq 0$

Ainsi selon le théorème des gendarmes la suite $\left(\int_{\gamma_{2m+1}}^{\rho} h(t)^{2m+1} dt\right)_{m \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 selon 19

21. Comme h est strictement croissante sur $] -\infty, 1[$, on a $\forall t \leq \rho$, $h(t) \leq -1$ et $h(t)^{2m+1} \leq -1$

donc pour $m \geq 1$, comme on a $\gamma_{2m+1} \leq \rho$ on a $\int_{\gamma_{2m+1}}^{\rho} h(t)^{2m+1} dt \leq (\rho - \gamma_{2m+1}) \times (-1)$

donc $0 \leq \rho - \gamma_{2m+1} \leq -\int_{\gamma_{2m+1}}^{\rho} h(t)^{2m+1} dt$

Alors avec les gendarmes : $\gamma_{2m+1} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \rho$ selon 20 d'où $\alpha_{2m+1}/(2m+1) \underset{m \rightarrow +\infty}{\sim} \rho$

donc $\alpha_{2m+1} \underset{m \rightarrow +\infty}{\sim} (2m+1)\rho$ D'où $\alpha_{2m+1} \underset{m \rightarrow +\infty}{\sim} 2m\rho$

Partie V.

22. (a) Selon l'égalité triangulaire, on a $\left|\sum_{i=1}^p \theta_i \alpha_i\right| \leq \sum_{i=1}^p \theta_i |\alpha_i| \leq \sum_{i=1}^p \theta_i$ car les $\theta_i > 0$

Comme $\left|\sum_{i=1}^p \theta_i \alpha_i\right| = \sum_{i=1}^p \theta_i$ alors $\sum_{i=1}^p \theta_i |\alpha_i| = \sum_{i=1}^p \theta_i$

donc $0 = \sum_{i=1}^p \theta_i (1 - |\alpha_i|)$, somme de réels positifs

donc $\theta_1 (1 - |\alpha_1|) = \dots = \theta_p (1 - |\alpha_p|) = 0$ d'où $1 - |\alpha_1| = \dots = 1 - |\alpha_p| = 0$

ainsi $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ sont des nombres complexes de module exactement 1

(b) On a $|\theta_1 + \theta_2 e^{it}|^2 = (\theta_1 + \theta_2 e^{it}) \overline{(\theta_1 + \theta_2 e^{it})} = (\theta_1 + \theta_2 e^{it}) (\theta_1 + \theta_2 e^{-it}) = \theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_1 \theta_2 (e^{it} + e^{-it})$

donc $|\theta_1 + \theta_2 e^{it}|^2 = \theta_1^2 + \theta_2^2 + 2 \cos(t) \theta_1 \theta_2$

D'un autre côté $|\theta_1 + \theta_2 e^{it}|^2 = |\theta_1 \alpha_1 + \theta_2 \alpha_2|^2 = (\theta_1 + \theta_2)^2$ par hypothèse

donc $2 \cos(t) \theta_1 \theta_2 = 2 \theta_1 \theta_2$ ainsi $\cos(t) = 1$ car $\theta_1 \theta_2 > 0$

donc $\sin(t) = 0$ d'où $e^{it} = 1$, on a justifié que $\alpha_2 = 1$ avec ces hypothèses

- (c) Sous les hypothèses de la questions 22, on va montrer
par récurrence bornée sur $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ que : $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k$

Initialisation : La propriété est évidente pour $k = 1$.

Traitons le cas : $k = 2$. (si $p \geq 2$) avec la convention $\sum_{i=a}^b (\dots) = 0$ si $b < a$

$$\text{On a : } \sum_{i=1}^2 \theta_i + \sum_{i=3}^p \theta_i = \sum_{i=1}^p \theta_i = \left| \sum_{i=1}^p \theta_i \alpha_i \right| \leq \left| \sum_{i=1}^2 \theta_i \alpha_i \right| + \left| \sum_{i=3}^p \theta_i \alpha_i \right|$$

$$\text{de plus } \left| \sum_{i=1}^2 \theta_i \alpha_i \right| \leq \sum_{i=1}^2 \theta_i \text{ et } \left| \sum_{i=3}^p \theta_i \alpha_i \right| \leq \sum_{i=3}^p \theta_i$$

$$\text{donc } \left| \sum_{i=1}^2 \theta_i \alpha_i \right| = \sum_{i=1}^2 \theta_i \text{ et } \left| \sum_{i=3}^p \theta_i \alpha_i \right| = \sum_{i=3}^p \theta_i$$

On a $|\alpha_1| = |\alpha_2| = 1$ en utilisant (a) avec $p = 2$

$$\text{On pose } \alpha'_1 = 1 \text{ et } \alpha'_2 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \text{ et on a } \left| \sum_{i=1}^2 \theta_i \alpha'_i \right| = \sum_{i=1}^2 \theta_i,$$

en utilisant (b) on obtient : $\alpha'_2 = 1$ donc $\alpha_2 = \alpha_1$

Hérédité : Soit $k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$ tel que $\forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket, \alpha_i = \alpha_1$. Montrons $\alpha_{k+1} = \alpha_1$.

$$\text{On a } \left| \sum_{i=1}^k \theta_i \alpha_i \right| = |\alpha_1| \times \left| \sum_{i=1}^k \theta_i \right| = \sum_{i=1}^k \theta_i$$

$$\text{Et en faisant comme ci dessus pour } k = 2, \text{ on obtient } \left| \sum_{i=1}^{k+1} \theta_i \alpha_i \right| = \sum_{i=1}^{k+1} \theta_i$$

$$\text{En posant } \alpha'_2 = \alpha_{k+1}/\alpha_1, \theta'_1 = \sum_{i=1}^k \theta_i \text{ et } \theta'_2 = \theta_{k+1} \text{ et comme } |\alpha_1| = 1,$$

$$\text{on a } |1 \cdot \theta'_1 + \alpha'_2 \theta'_2| = \theta'_1 + \theta'_2 \text{ où } \theta'_1 > 0, \theta'_2 > 0 \text{ et } |\alpha'_2| = 1$$

En ré-applicant (b), on obtient $\alpha'_2 = 1$ d'où le résultat

Conclusion : On a montré par récurrence que pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket : \forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket, \alpha_i = \alpha_1$

Dans le cas général, on a bien : $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_p$

23. (a) On a $P(0) = a_0 > 0$ et $P(1) = a_n + \dots + a_0 > 0$ ce qui justifie que ni 0, ni 1, ne sont des racines de P

$$(b) \quad (X-1)P(X) = a_n X^{n+1} + (a_{n-1} - a_n)X^n + \dots + (a_1 - a_2)X^2 - a_0 = a_n X^{n+1} + \sum_{k=2}^n (a_k - a_{k-1}) X^k - a_0$$

- (c) Par l'absurde, on suppose P admet une racine z telle que $|z| \leq 1$

donc z est racine de $(X-1)P(X)$ donc $a_n z^{n+1} + (a_{n-1} - a_n)z^n + \dots + (a_1 - a_2)z^2 = a_0 > 0$

Je pose alors $n = p, \alpha_p = z^{n+1}, \alpha_{p-1} = z^n, \dots, \alpha_1 = z^2$ et $\theta_p = a_n, \theta_{p-1} = a_{n-1} - a_n, \dots, \theta_1 = a_1 - a_2$

de sorte que $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ sont des nombres complexes de module ≤ 1

$$\text{et } \theta_1, \dots, \theta_p \text{ sont des nombres réels } > 0 \text{ tels que } \left| \sum_{i=1}^p \theta_i \alpha_i \right| = a_0 = \sum_{i=1}^p \theta_i$$

On peut donc appliquer 22 pour obtenir : $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_p$

donc $z^2 = z^3$ ainsi $Z \in \{0, 1\}$ ce qui est en contradiction avec 23(a)

Ainsi les racines complexes de P ont un module > 1

24. Soit z une racine de Q .

Si $z = 0$, alors on a bien $|z| < 1$

Si $z \neq 0$, alors $\frac{Q(z)}{z^n} = 0$

donc $1/z$ est racine du polynôme $P(X) = a_n + a_{n-1}z + \dots + a_1z^{n-1} + a_0z^n$

Ainsi le polynôme vérifie les hypothèses de la questions 23

d'où $|1/z| > 1$ et donc $|z| < 1$

On a bien montré que les racines complexes de Q ont un module < 1

25. Soit r une racine complexe de S_n donc $z = r/n$ est une racine de T_n

Or $T_n = \sum_{i=0}^n \frac{n^i}{i!} X^i = \sum_{i=0}^n a_i X^i$ en posant $a_i = \frac{n^i}{i!}$

Pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $a_i > 0$ et si $i < n$, on a $\frac{a_{i+1}}{a_i} = \frac{n^{i+1}i!}{(i+1)!n^i} = \frac{n}{i+1}$

donc $0 < a_0 < a_1 < \dots < a_{n-2} < a_{n-1} = a_n$ ce qui permet d'appliquer 23

d'où $|r| < 1$ donc $|z| < n$

les racines de S_n sont bien de module $< n$