e3a 2017 MP : Maths 1

EXERCICE n° 1

Dans tout l'exercice α désigne un réel strictement supérieur à 1.

1) Soit un entier n strictement positif.

a) Justifier l'existence de l'intégrale notée I_n égale à $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^\alpha)^n}\,\mathrm{d}t$.

b) En effectuant le changement de variable $t = \left(\dfrac{u}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ dans l'intégrale I_n, montrer que l'application $u \longmapsto \dfrac{u^{\frac{1}{\alpha}-1}}{(1+\frac{u}{n})^n}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ et exprimer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u^{\frac{1}{\alpha}-1}}{(1+\frac{u}{n})^n}\,\mathrm{d}u$ en fonction de l'intégrale I_n.

c) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall u \geqslant 0, \left(1+\frac{u}{n}\right)^n \geqslant 1+u.$$

2) Déterminer la limite : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{u}{n}\right)^n$ pour $u \geqslant 0$.

3) Pour tout entier $n \geqslant 1$, on définit la suite (v_n) par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \int_0^{+\infty} \frac{u^{\frac{1}{\alpha}-1}}{(1+\frac{u}{n})^n}\,\mathrm{d}u.$$

a) Montrer, en justifiant avec soin, que la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ lorsque n tend vers plus l'infini est égale à $\Gamma\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)$ où $\Gamma\left(\dfrac{1}{\alpha}\right) = \displaystyle\int_0^{+\infty} u^{\frac{1}{\alpha}-1}e^{-u}\,\mathrm{d}u$.

b) En déduire un équivalent de l'intégrale I_n lorsque n tend vers plus l'infini.

4) **a)** Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} I_n x^n$ où I_n est la suite définie à la question 1).

b) Pour $x \in \mathbb{R}$ tel que : $|x| < R$, on note $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} I_n x^n$. Montrer, en précisant avec soin le théorème utilisé, que :

$$S(x) = \int_0^{+\infty} \frac{x}{1+t^\alpha - x}\,\mathrm{d}t \quad \text{pour} \quad |x| < R.$$

EXERCICE n° 2

E est un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$ muni du produit scalaire $(x, y) \longmapsto (x|y)$. On rappelle qu'un automorphisme de E est un endomorphisme **bijectif** de E. On considère un automorphisme u de E qui vérifie la propriété (1) :

$$(1) \quad \forall (x, y) \in E \times E, (u(x)|y) = -(x|u(y)).$$

1) Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E. Soit A la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$.

a) Étant donnés deux entiers i, j compris entre 1 et n, on note $a_{i,j}$ le (i, j)-ème coefficient de A. Justifier :

$$a_{i,j} = (u(e_j)|e_i).$$

b) En déduire l'égalité : ${}^tA = -A$.

2) Montrer que l'entier n est un nombre pair.
Indication : On pourra considérer le déterminant de la matrice A.

3) On appelle v l'automorphisme égal à $u \circ u$. Montrer que v est un automorphisme diagonalisable dans une base orthonormée de E.

4) Soit λ une valeur propre réelle de v, montrer que λ est strictement négative.

5) On note x un vecteur propre de l'automorphisme v associé à la valeur propre λ et F le sous-espace vectoriel de E engendré par x et $u(x)$.

a) Montrer que la dimension de F est égale à 2.

b) Montrer que F est stable par l'automorphisme u, en déduire que l'orthogonal $F^\perp$ est aussi stable par u. On notera u_F et $u_{F^\perp}$ les applications induites par l'automorphisme u sur les sous-espaces vectoriels F et $F^\perp$.

c) Soit λ une valeur propre réelle de v, on pose $a = \sqrt{-\lambda}$. Montrer qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{B}'$ de F telle que la matrice de u_F dans la base $\mathcal{B}'$ soit égale à $\begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$.

Indication : On pourra considérer les vecteurs $e'_1 = \dfrac{1}{\| x \|} x$ *et* $e'_2 = \dfrac{1}{a \| x \|} u(x)$.

d) Montrer que l'endomorphisme $u_{F^\perp}$ est un automorphisme vérifiant la relation (1).

6) On suppose dans cette question que l'espace euclidien E est de dimension 4. Soit u un automorphisme de E vérifiant la relation (1).
Montrer qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$" de E et deux réels α et β non nuls tels que la matrice de l'automorphisme u dans cette base soit égale à :

$$\begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\beta \\ 0 & 0 & \beta & 0 \end{pmatrix}.$$

EXERCICE n° 3

Première partie

Soit un réel $a \in]0, 29[$, on considère la fonction H définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, H(t) = 10\ t^3 + 31\ t^2 + 71\ t - a.$$

1) Montrer qu'il existe un unique réel noté $\ell \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ tel que : $H(\ell) = 0$.

2) On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = \frac{1}{2}$.
Pour tout entier n, u_{n+1} est l'abscisse du point d'intersection de l'axe des abscisses et de la tangente à la courbe d'équation $y = H(x)$, au point de coordonnées $(u_n, H(u_n))$.

a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - \frac{H(u_n)}{H'(u_n)}.$$

b) Déterminer le sens de variation de l'application $f : \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & t - \dfrac{H(t)}{H'(t)} \end{array} \right.$.

En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \left[\ell, \frac{1}{2}\right].$$

c) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left|H(\ell) - H(u_n) - (\ell - u_n)H'(u_n)\right| \leqslant 46|u_n - \ell|^2.$$

d) En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \ell| \leqslant \frac{46\ |u_n - \ell|^2}{71}$$

puis que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \ell| \leqslant \frac{7\ |u_n - \ell|^2}{10}$$

e) Pour tout réel $a \in]0, 29[$, vérifier que u_2 est une valeur approchée de ℓ à 0.03 près.

3) Application informatique. On utilisera le langage Python sans aucune bibliothèque supplémentaire.
Écrire une fonction *suite(a,n)* en langage Python qui prend en entrée le paramètre a et un entier n et qui renvoie la liste $[u_0, u_1, \ldots, u_n]$ des $n + 1$ premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la question 2) en fonction de a.

Deuxième partie

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, deux réels a et b strictement positifs et une variable aléatoire X définie sur Ω telle que $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ et dont la loi est définie par :

$$\begin{cases} P(X=0) & = & \dfrac{a}{100} \\ P(X=1) & = & \dfrac{b}{100} \\ P(X=2) & = & \dfrac{2}{5} \\ P(X=3) & = & \dfrac{21}{100} \\ P(X=4) & = & \dfrac{1}{10} \end{cases}$$

On rappelle que la fonction génératrice d'une variable aléatoire Y est la somme de la série entière :

$$\forall t \in [0,1], G_Y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(Y=n)t^n.$$

1) Déterminer la relation liant les réels a et b.

2) Déterminer la fonction génératrice G_X de la variable aléatoire X.

3) On suppose qu'une population évolue par générations. Étant donné un entier naturel $n \geqslant 1$, on note Z_n la variable aléatoire qui représente le nombre d'individus de la n-ième génération. Le nombre de descendants de chaque individu d'une génération quelconque suit la loi de la variable aléatoire X. On pose $Z_0 = 1$.

On admet que pour tout entier naturel n, la fonction génératrice G_{Z_n} de la variable aléatoire Z_n vérifie la relation de récurrence :

$$G_{Z_{n+1}} = G_X \circ G_{Z_n}$$

Dans cet exercice, on s'intéresse à la probabilité d'extinction de la population à long terme, ce qu'on mesure par le comportement asymptotique de la suite $(P(Z_n = 0))_{n\in\mathbb{N}}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $w_n = P(Z_n = 0)$.

a) Soit $n \in \mathbb{N}$, exprimer w_n en fonction de la fonction génératrice G_{Z_n}.

b) Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer w_{n+1} en fonction de w_n.

c) Montrer que $G\left(\left[0, \dfrac{1}{2}\right]\right) \subset \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$, en déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, w_n \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$.

Montrer alors que la suite (w_n) est convergente vers un réel noté $L(a)$ appartenant à $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$.

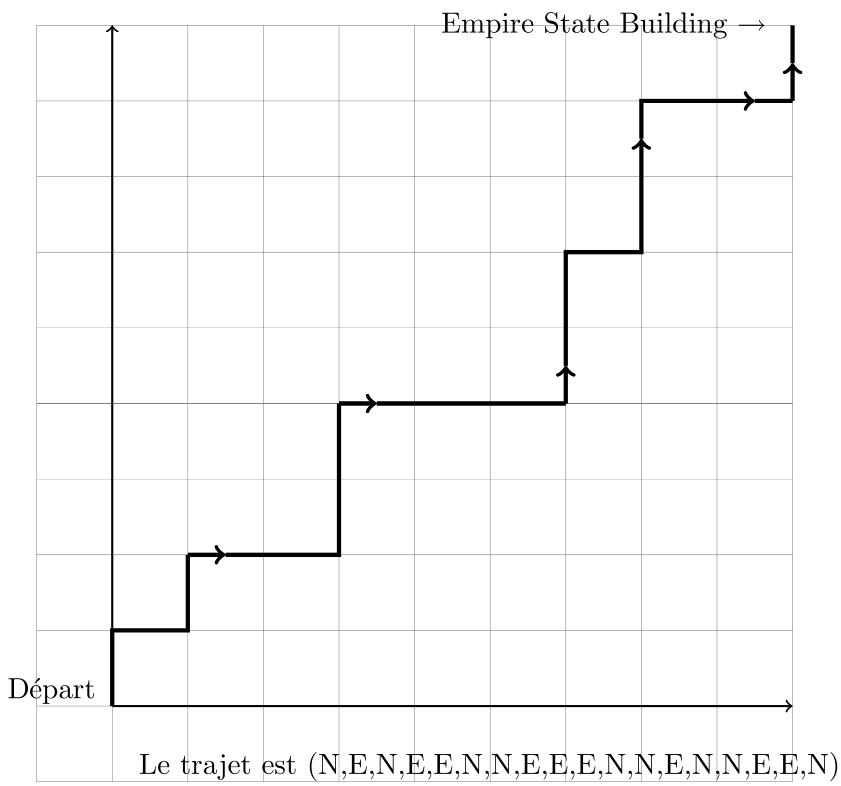
d) Montrer que le réel $L(a)$ est égal au réel ℓ de la partie I, en déduire une approximation de la probabilité $L(a)$ d'extinction de la population à long terme en fonction de a.

EXERCICE n° 4

Le but de cet exercice est de modéliser le trajet d'un piéton dans une grande ville dont les rues se croisent à angle droit.
À New-York, dans le quartier de Manhattan, un piéton voit au loin, dans la direction du Nord, le gratte-ciel Empire State Building sous un angle de 45 degrés vers l'Est.
A chaque croisement de rues, le piéton choisit d'aller soit vers le Nord (N), soit vers l'Est E).
On appelle étape le déplacement du piéton entre deux croisements consécutifs. Soit l un entier naturel non nul. Un trajet de l étapes est représenté par une suite $(u_1, u_2, \dots, u_l)$ avec, pour tout entier i compris entre 1 et l, $u_i = E$ si, au i-ème croisement, le piéton s'est dirigé vers l'Est et $u_i = N$ si, au i-ème croisement, le piéton s'est dirigé vers le Nord.
On définit l'origine du repère au point de départ du piéton, chaque croisement du trajet a pour coordonnées (x, y) où x reprśente le nombre de rues vers l'Est depuis l'origine et y le nombre de rues vers le Nord toujours depuis l'origine, les croisements se situent à égales distances. A chaque trajet de l étapes (l est un entier naturel non nul) on associe le chemin passant par la suite des points de coordonnées (x_k, y_k) pour $0 \leqslant k \leqslant l$ définies par récurrence par :
$x_0 = y_0 = 0$
pour $1 \leqslant k \leqslant l$,

$$(x_k, y_k) = \begin{cases} (x_{k-1}, y_{k-1} + 1) & \text{si} \quad u_k = N \\ (x_{k-1} + 1, y_{k-1}) & \text{si} \quad u_k = E \end{cases}$$

La figure ci-jointe illustre un trajet de 18 étapes du piéton.



1) **a)** Écrire en langage Python une fonction *deplacement(L,a,b)* dont la valeur est $(a, b+1)$ si $L = "N"$ et $(a+1, b)$ si $L = "E"$.

b) Écrire une fonction *chemin(m)* où m est une chaîne constituée des caractères $"N"$ et $"E"$ et qui renvoie la liste des abscisses ainsi que la liste des ordonnées des points du trajet.

2) **a)** En remarquant qu'à chaque étape on a deux choix possibles, déterminer le nombre de trajets comportant exactement l étapes où $l \in \mathbb{N}^*$.

b) Le nombre de chemins reliant l'origine au point de coordonnées $(3, 2)$ est égal au nombre de trajets de cinq étapes comportant deux étapes N et trois étapes E, en déduire le nombre de trajets reliant l'origine au point de coordonnées $(3, 2)$.

c) Plus généralement, soit un point M de coordonnées (a, b) avec $(a, b) \neq (0, 0)$, déterminer le nombre de chemins reliant l'origine à ce point M.

3) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle U_n l'événement "Le chemin passe pour la première fois à l'étape $2n$ par un point de la droite Δ d'équation $y = x$". On pourra noter N_k l'événement "à l'étape k, le déplacement se fait vers le Nord" et E_k l'événement "à l'étape k, le déplacement se fait vers l'Est".

a) Calculer la probabilité de l'événement U_1.

b) Soient quatre entiers naturels a, b, c, d, on note $C_{(a,b)}^{(c,d)}$ l'ensemble des chemins reliant le point de coordonnées (a, b) au point de coordonnées (c, d). Déterminer le cardinal de l'ensemble $C_{(0,1)}^{(n-1,n)}$ des chemins reliant le point de coordonnées $(0, 1)$ au point de coordonnées $(n-1, n)$ pour $n \geqslant 2$.

c) Soit $n \geqslant 2$. On admet pour des raisons de symétrie que le nombre de chemins reliant le point de coordonnées $(0, 1)$ au point de coordonnées $(n-1, n)$ et coupant la droite d'équation $y = x$ est égal au nombre de chemins reliant le point de coordonnées $(1, 0)$ au point de coordonnées $(n-1, n)$. Déterminer le nombre de chemins reliant le point de coordonnées $(0, 1)$ au point de coordonnées $(n-1, n)$ et coupant la droite d'équation $y = x$.
Soient quatre entiers naturels a, b, c, d, on note $T_{(a,b)}^{(c,d)}$ l'ensemble des chemins reliant le point de coordonnées (a, b) au point de coordonnées (c, d) ne coupant pas la droite d'équation $y = x$.

d) En déduire le cardinal de l'ensemble $T_{(0,1)}^{(n-1,n)}$ des chemins reliant le point de coordonnées $(0, 1)$ au point de coordonnées $(n-1, n)$ ne coupant pas la droite d'équation $y = x$.

e) Déterminer de même le cardinal de l'ensemble $T_{(1,0)}^{(n,n-1)}$ des chemins reliant le point de coordonnées $(1, 0)$ au point de coordonnées $(n, n-1)$ ne coupant pas la droite d'équation $y = x$.

f) En déduire que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$:

$$P(U_n) = \frac{1}{2^{2n-1}} \times \frac{(2n-2)!}{n!\ (n-1)!}$$

puis que

$$P(U_n) = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \ldots \times (2n-3)}{2 \times 4 \times \ldots \times 2n}.$$

4) On considère la suite (v_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = P(U_n)$.

a) Déterminer le réel a tel que :

$$\ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{a}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

b) En appliquant la comparaison série-intégrale, montrer qu'il existe une constante γ réelle telle que :

$$\sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n} \underset{N\to+\infty}{=} \ln(N) + \gamma + o(1).$$

c) En calculant de deux manières différentes la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{N-1} \ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right)$, montrer qu'il existe une constante $k > 0$ telle que :

$$v_N \underset{N\to+\infty}{\sim} \frac{k}{N^{\frac{3}{2}}}$$

d) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2, v_{n+1} = (2n-1)v_n - (2n+1)v_{n+1}$, en déduire la somme de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} P(U_n)$, que peut-on en déduire ?