E3A – MP – Maths 2

Partie I

1. Une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est convexe sur l'intervalle I si, pour tout $(x,y) \in I^2$ et tout $\theta \in]0,1[$, on a $f\big((1-\theta)x+\theta y\big) \leqslant (1-\theta)f(x)+\theta f(y)$.
2. La fonction exponentielle est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée seconde y est positive, elle est donc convexe sur $\mathbb{R}$.
3. Appliquons la définition vue en 1. avec $f = \exp$ et $(x,y) = (\ln b, \ln a)$. On obtient

$$\exp\big(\theta \ln a + (1-\theta)\ln b\big) \leqslant \theta e^{\ln a} + (1-\theta)e^{\ln b}$$

qui constitue le résultat demandé.

Partie II

4. (a) On a immédiatement $\displaystyle\int_u^v t^{x-1}\,dt = \frac{v^x-u^x}{x}$.

   (b) La fonction intégrée étant positive, il revient au même d'étudier la convergence (non absolue) de l'intégrale. Or, la fonction intégrée est définie et continue sur $]0,1]$, et la question précédente montre que $\int_u^1 t^{x-1}\,dt$ a pour limite $1/x$ quand u tend vers 0 (puisque $x>0$).

   L'intégrale est donc absolument convergente et vaut $1/x$.

   Remarque : cela semble être ce qu'attend l'énoncé au vu de la question (a) ; mais Riemann donne évidemment la convergence immédiatement.

5. La fonction $t \longmapsto t^{x-1}e^{-t}$ est définie, continue et positive sur $]0,1]$, et majorée par la fonction intégrable $t \longmapsto t^{x-1}$; elle est donc bien intégrable sur $]0,1]$.

6. (a) Puisque $x>0$, on sait que $t^{x/2}\ln t$ tend vers 0 en 0 (croissances comparées).

   (b) La fonction $t \longmapsto (\ln t)t^{x-1}e^{-t}$ est définie et continue sur $]0,1]$. D'autre part, la question (a) montre que $\ln t = o(t^{-x/2})$ au voisinage de 0, et donc $(\ln t)t^{x-1}e^{-t} = o(t^{x/2-1}e^{-t})$ en 0.

   Puisque $x/2>0$, la fonction positive $t \longmapsto t^{x/2-1}e^{-t}$ est intégrable sur $]0,1]$ d'après 5. ; par suite, $t \longmapsto (\ln t)t^{x-1}e^{-t}$ l'est aussi.

7. (a) Soit $t \in]0,1]$. La fonction $x \longmapsto t^{x-1} = e^{(x-1)\ln t}$ est alors décroissante sur $[u,v]$ (puisque $\ln t \leqslant 0$) ; on a donc bien $\big|(\ln t)^2 t^{x-1}e^{-t}\big| = (\ln t)^2 t^{x-1}e^{-t} \leqslant (\ln t)^2 t^{u-1}$ puisque tous les facteurs sont positifs.

   (b) On raisonne comme en 6.(b) : on a aussi $(\ln t)^2 = o(t^{x/2})$ en 0, et donc $(\ln t)^2 t^{x-1}e^{-t} = o(t^{x/2-1}e^{-t})$ en 0, ce qui suffit à garantir l'intégrabilité.

8. Soit $[u,v] \subset \mathbb{R}_+^*$. On applique, sur $[u,v]$, le théorème de dérivation des intégrales à paramètre, version dérivées successives. Posons, pour $t \in]0,1]$ et $x \in [u,v]$, $f(x,t) = t^{x-1}e^{-t}$. On a alors :
   - pour tout $x \in [u,v]$, $f(x,\cdot)$ est continue par morceaux et intégrable sur $]0,1]$ (question 5.) ;
   - f admet des dérivées partielles première et seconde par rapport à x en tout point de $[u,v] \times]0,1]$;
   - pour tout $x \in [u,v]$, la fonction $t \longmapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = (\ln t)t^{x-1}e^{-t}$ est continue par morceaux et intégrable sur $]0,1]$ (question 6.) ;
   - enfin, $\forall x \in [u,v] \quad \forall t \in]0,1] \quad \left|\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)\right| = \big|(\ln t)^2 t^{x-1}e^{-t}\big| \leqslant (\ln t)^2 t^{u-1}e^{-t} = \varphi(t)$ et φ est continue par morceaux et intégrable sur $]0,1]$ (question 7.).

   On peut alors conclure que F est de classe C^2 sur $[u,v]$, et ce pour tout $[u,v] \subset \mathbb{R}_+^*$, donc que F est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$; et que, pour tout $x>0$,

$$F'(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt = \int_0^1 (\ln t)t^{x-1}e^{-t}\,dt \quad \text{et} \quad F''(x) = \int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)\,dt = \int_0^1 (\ln t)^2 t^{x-1}e^{-t}\,dt$$

Partie III

9. On a par exemple $(\ln t)^2 = o(t)$ en $+\infty$ par croissances comparées, donc $(\ln t)^2 t^{x-1} e^{-t/2} = o(t^x e^{-t/2})$; puisque $t^x e^{-t/2}$ a pour limite 0 en $+\infty$, c'est aussi le cas pour $(\ln t)^2 t^{x-1} e^{-t/2}$.
10. La fonction $t \longmapsto (\ln t)^2 t^{x-1} e^{-t}$ est définie et continue par morceaux sur $[1, +\infty[$; la question 9. montre qu'elle est négligeable devant $e^{-t/2}$ en $+\infty$.
    Puisque $t \longmapsto e^{-t/2}$ est positive et notoirement intégrable sur $[1, +\infty[$ (car négligeable devant $1/t^2$ par exemple), $t \longmapsto (\ln t)^2 t^{x-1} e^{-t}$ est elle aussi intégrable sur $[1, +\infty[$.
    Enfin, puisque $\ln t$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$, les fonctions proposées en (a) et (b) sont négligeables devant $\left|(\ln t)^2 t^{x-1} e^{-t}\right|$ en $+\infty$, donc sont elles aussi intégrables sur $[1, +\infty[$.
11. La démonstration est quasi identique à celle de la question 8. La seule différence notable est qu'ici, pour tout $t \in [1, +\infty[$, la fonction $x \longmapsto t^{x-1}$ est croissante ; il faut donc dominer $(\ln t)^2 t^{x-1} e^{-t}$ par la valeur pour $x = v$ au lieu de $x = u$.

Partie IV

12. Les facteurs étant de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, on peut intégrer par parties, en primitivant le facteur e^{-t} :
$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t}\, dt = \left[-t^x e^{-t}\right]_{t=0}^{+\infty} + \int_0^{+\infty} x t^{x-1} e^{-t}\, dt = x\Gamma(x)$$
    l'intégration par parties étant justifiée par le fait que la fonction dans le crochet a des limites finies (nulles) en 0 et $+\infty$.
13. On a immédiatement $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\, dt = [-e^{-t}]_{t=0}^{+\infty} = 1$.
14. On a classiquement $\Gamma(n) = (n-1)!$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, ce qui s'établit par une récurrence immédiate à l'aide des deux questions précédentes.
15. En particulier, $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$. Puisque Γ est continue sur $[1, 2]$ et dérivable sur $]1, 2[$, le théorème de Rolle montre que Γ' s'annule au moins une fois sur $]1, 2[$.
16. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$; on sait que $\Gamma''(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^2 t^{x-1} e^{-t}\, dt$. La fonction $t \longmapsto (\ln t)^2 t^{x-1} e^{-t}$ est continue, positive, et non identiquement nulle sur $\mathbb{R}_+^*$; par suite, $\Gamma''(x) > 0$.
    Cela étant vrai pour tout $x > 0$, Γ est donc bien convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.
17. Puisque Γ'' est strictement positive, Γ' est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
    On a prouvé en 15. que Γ' s'annule en au moins un point $\alpha \in]1, 2[$. La stricte croissance de Γ' montre que c'est son seul point d'annulation, et que Γ' est négative sur $]0, \alpha[$, positive sur $]\alpha, +\infty[$; par suite, Γ est décroissante sur $]0, \alpha[$, croissante sur $]\alpha, +\infty[$, et donc admet un minimum global en α.
18. Il reste à étudier le comportement de Γ aux bornes du domaine de définition.
    Au voisinage de 0, $\Gamma(x) = \dfrac{\Gamma(x+1)}{x} \sim \dfrac{\Gamma(1)}{x} = \dfrac{1}{x}$ puisque Γ est en particulier continue en 1 ; par suite, Γ tend vers $+\infty$ en 0^+.
    Au voisinage de $+\infty$, Γ est croissante, donc admet une limite, finie ou infinie ; et cette limite est $+\infty$ puisque $\Gamma(n) = (n-1)!$ a pour limite $+\infty$.
    On en déduit aisément le tracé de la courbe.

Partie V

19. La fonction $x \longmapsto \ln(e^{cx}) = cx$ est affine, donc convexe (et concave) ; $x \longmapsto e^{cx}$ est donc bien ln-convexe.
20. Soient $(x, y) \in I^2$ et $\theta \in [0, 1]$. En appliquant la fonction exponentielle (croissante) à l'inégalité qui caractérise la ln-convexité, on obtient
$$f\big(\theta x + (1-\theta)y\big) \leqslant \exp\big(\theta \ln(f(x)) + (1-\theta)\ln(f(y)\big) = f(x)^\theta f(y)^{1-\theta}$$
    La question 3 donne alors $f(x)^\theta f(y)^{1-\theta} \leqslant \theta f(x) + (1-\theta) f(y)$ en prenant $a = f(x)$ et $b = f(y)$. On a donc bien prouvé l'inégalité caractérisant la convexité de f.
    La réciproque est fausse : la fonction $x \longmapsto x$ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$, mais $x \longmapsto \ln x$ ne l'est pas.

21. (a) Il suffit d'écrire l'inégalité $g_c\big(\theta x + (1-\theta)y\big) \leqslant \theta g_c(x) + (1-\theta)g_c(y)$ puis de la diviser par $\exp\big(\theta x + (1-\theta)y\big)$.

(b) i. Puisque $1-\theta$, θ, $y-x$ et $f(y)$ sont strictement positifs, le deuxième terme de la somme a pour limite $+\infty$ quand c tend vers $+\infty$. Le premier terme étant clairement positif, $H(c)$ a pour limite $+\infty$ en $+\infty$.

ii. Dans la formule définissant $H(c_0)$, on remplace $e^{c_0(x-y)}$ par $f(y)/f(x)$; on obtient

$$\begin{aligned} H(c_0) &= \theta\,\frac{f(y)^{1-\theta}}{f(x)^{1-\theta}}\,f(x) + (1-\theta)\,\frac{f(y)^{-\theta}}{f(x)^{-\theta}}\,f(y) \\ &= \theta f(x)^\theta f(y)^{1-\theta} + (1-\theta)f(x)^\theta f(y)^{1-\theta} = f(x)^\theta f(y)^{1-\theta} \end{aligned}$$

iii. Puisque H' s'annule en changeant de signe en c_0, et que H tend vers $+\infty$ en $+\infty$, H ne peut être que décroissante sur $[0, c_0]$, et croissante sur $[c_0, +\infty[$; H admet donc un minimum en c_0.

(c) Puisque l'inégalité du (a) est vraie pour tout $c > 0$, elle est en particulier vraie pour $c = c_0$; donc

$$f\big(\theta x + (1-\theta)y\big) \leqslant H(c_0) = f(x)^\theta f(y)^{1-\theta}$$

En composant par ln (croissante), on obtient l'inégalité qui caractérise la ln-convexité de f.

22. La fonction $\varphi_{c,\theta}$ est de la forme $x \longmapsto ae^{bx}$, avec $b = c + \ln\theta$ et $a = e^{-\theta}/\theta > 0$; par suite, pour tout $x > 0$, $\varphi''_{c,\theta}(x) = b^2\varphi_{c,\theta}(x) \geqslant 0$, et donc $\varphi_{c,\theta}$ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.

23. La fonction Γ prend bien ses valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ (intégrale d'une fonction continue positive non identiquement nulle).

Soit d'autre part $c > 0$. Soit $\Delta : x \longmapsto e^{cx}\Gamma(x)$; notons que, pour tout $x > 0$,

$$\Delta(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}e^{cx}\,dt = \int_0^{+\infty} \varphi_{c,t}(x)\,dt$$

Soient enfin $(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ et $\theta \in [0,1]$. On a alors

$$\begin{aligned} \Delta\big(\theta x + (1-\theta)y\big) &= \int_0^{+\infty} \varphi_{c,t}\big(\theta x + (1-\theta)y\big)\,dt \\ &\leqslant \int_0^{+\infty} [\theta\varphi_{c,t}(x) + (1-\theta)\varphi_{c,t}(y)]\,dt \qquad \text{(convexité de } \varphi_{c,t}) \\ &= \theta\Delta(x) + (1-\theta)\Delta(y) \end{aligned}$$

La fonction Δ est donc convexe, et ce pour tout $c > 0$; d'après la question 21., la fonction Γ est donc ln-convexe.

Partie VI

24. On démontre comme à la question 14. que $g(n) = (n-1)!$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

25. (a) La fonction G est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$. On sait qu'alors, pour tout $(a,b,c) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$ tel que $a < b < c$, on a $\dfrac{G(b)-G(a)}{b-a} \leqslant \dfrac{G(c)-G(a)}{c-a} \leqslant \dfrac{G(c)-G(b)}{c-b}$ (inégalités des pentes).

En particulier, $0 < n-1 < n < n+x$, donc $\dfrac{G(n)-G(n-1)}{n-(n-1)} = G(n) - G(n-1) \leqslant \dfrac{G(n+x)-G(n-1)}{(n+x)-(n-1)} \leqslant \dfrac{G(n+x)-G(n)}{(n+x)-n} = \dfrac{G(n+x)-G(n)}{x}$ qui donne la première des inégalités demandées ; la deuxième s'obtient de même en utilisant $n < n+x < n+1$.

(b) On multiplie l'encadrement par $x > 0$, et on remplace G par $\ln g$; on obtient

$$x\ln\frac{g(n)}{g(n-1)} \leqslant \ln\frac{g(n+x)}{g(n)} \leqslant x\ln\frac{g(n+1)}{g(n)} \quad \text{soit} \quad \ln(n-1)^x \leqslant \ln\frac{g(x+n)}{(n-1)!} \leqslant \ln n^x$$

en utilisant $g(p) = (p-1)!$ pour $p \in \mathbb{N}^*$; on en tire immédiatement l'encadrement demandé.

26. En utilisant la relation $g(x+1) = xg(x)$, une récurrence immédiate fournit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $g(x+n) = x(x+1)\cdots(x+n-1)g(x)$.

Remplaçons $g(x+n)$ par cette expression dans l'inégalité de la question précédente : on obtient

$$\frac{(n-1)^x (n-1)!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)} = \frac{n-1}{x+n-1}\,\frac{(n-1)^x(n-2)!}{x(x+1)\cdots(x+n-2)} \leqslant g(x) \leqslant \frac{n^x(n-1)!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}$$

ce qui constitue l'encadrement demandé.

27. (a) La fonction $t \longmapsto (1+t)^x$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+$, de dérivée seconde $t \longmapsto x(x-1)(1+t)^{x-2}$ négative puisque $x \in]0,1[$: elle est donc concave.

La courbe est donc sous ses tangentes, en particulier sous sa tangente en 0 ; ce qui donne, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $\quad (1+t)^x \leqslant 1 + xt \quad$ qui est l'inégalité demandée.

(b) On a clairement $u_n(x) > 0$ pour tout n. D'autre part, toujours pour tout $n \geqslant 2$,

$$\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} = \frac{(n+1)^x}{n^x}\,\frac{n}{x+n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^x \frac{n}{x+n} \leqslant \left(1+\frac{x}{n}\right)\frac{n}{x+n} = 1$$

en utilisant la question précédente avec $\alpha = 1/n > 0$; la suite $\big(u_n(x)\big)$ est donc décroissante.

(c) La suite est décroissante et minorée par $g(x)$, donc elle converge vers une limite $\ell(x)$. On peut alors passer à la limite dans l'encadrement de la question 26. pour obtenir $\quad \ell(x) \leqslant g(x) \leqslant \ell(x)$ et donc $\quad \ell(x) = g(x)$.

28. La fonction Γ vérifie elle aussi les trois propriétés imposées à g au début de cette partie. On peut donc appliquer les résultats des questions précédentes à Γ ; en particulier, pour tout $x \in]0,1[$, $\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} u_n(x) = g(x)$. Par suite, $\Gamma = g$ sur $]0,1]$, puisque $\Gamma(1) = g(1) = 1$.

Les relations $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ et $g(x+1) = xg(x)$ permettent alors de montrer par récurrence que, pour tout $x \in]0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(x+n) = g(x+n)$; autrement dit, $\Gamma = g$ sur $]n, n+1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et donc $\Gamma = g$ sur $\mathbb{R}_+^*$.