

E3A 2015 – MP – Maths 2 Corrigé

Partie I.

1. Voir le cours.
2. Puisque $\rho \in D(0, R)$, la série $\sum a_n \rho^n$ converge ; son terme général tend donc vers 0, donc est borné, d'où le résultat.
3. Soit M vérifiant $|a_n \rho^n| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si $M \leq 1$, alors $M \leq 1^n$ pour tout n ; sinon, $M \leq M^n$ pour tout n . En prenant $K = \max\{1, M\}$, on a donc bien $|a_n| \leq (K/\rho)^n$ pour tout n .
4. On raisonne par récurrence sur n . Le résultat est clair pour $n = 0$; supposons le vrai jusqu'à un rang $n - 1 \geq 0$. Alors, au rang n , $|b_n| \leq \sum_{j=1}^n |a_j| |b_{n-j}|$ et $0 \leq n - j \leq n - 1$ pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence pour obtenir

$$|b_n| \leq \sum_{j=1}^n \left(\frac{K}{\rho}\right)^j \left(\frac{2K}{\rho}\right)^{n-j} = \left(\frac{K}{\rho}\right)^n \sum_{i=0}^{n-1} 2^i = \left(\frac{K}{\rho}\right)^n \frac{2^n - 1}{2 - 1} \leq \left(\frac{2K}{\rho}\right)^n$$

où l'on a entre autres posé $i = n - j$ à la deuxième étape ; cela achève la récurrence.

5. Posons $r = \frac{\rho}{2K}$. Alors, $r > 0$ et, pour tout $t \in]0, r[$, $|b_n t^n| \leq \left(\frac{t}{r}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. On sait qu'alors le rayon de convergence de la série entière $\sum b_n t^n$ est au moins égal à r , donc est strictement positif.
6. Question étrangement formulée. En termes de séries entières, on sait que, pour tout $z \in D(0, R')$, le nombre $S(z)T(z)$ est la somme de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$, où, pour tout n , $c_n = \sum_{j=0}^n a_j b_{n-j}$. On a donc $c_0 = a_0 b_0 = 1$; et, pour tout $n \geq 1$, $c_n = b_n + \sum_{j=1}^n a_j b_{n-j} = 0$ par définition de (b_n) .
7. On a donc $S(z)T(z) = 1$ pour tout $z \in D(0, R')$, ce qui établit le résultat annoncé.

Partie IIA.

1. Les théorèmes usuels montrent que la restriction de f à \mathbb{R} est continue en chaque point des ouverts \mathbb{R}_+^* et \mathbb{R}_-^* .

En 0, on utilise le DL₁ de e^x : au voisinage de 0, $e^x = 1 + x + o(x)$ et donc $\frac{e^x - 1}{x} = 1 + o(1)$ pour x non nul. La restriction de f à \mathbb{R} a donc bien pour limite $1 = f(0)$ en 0.

2. On a $e^z = e^x e^{iy}$ d'où $\operatorname{Re}(e^z - 1) = e^x \cos y - 1$ et $\operatorname{Im}(e^z - 1) = e^x \sin y$.
3. Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$ tel que $f(z) = 0$. La question 2. donne $e^x \sin y = 0$, d'où l'existence de $k \in \mathbb{Z}$ tel que $y = k\pi$; puis $e^x \cos y = (-1)^k e^x = 1$, d'où $x = 0$ et k pair. Enfin, $f(0) = 1$, le couple $(x, y) = (0, 0)$ n'est donc pas solution.

Inversement, pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$, $e^{2in\pi} = 1$; l'ensemble des solutions est donc $\{2in\pi ; n \in \mathbb{Z}^*\}$.

Remarque : la forme module-argument paraît plus adaptée pour résoudre l'équation.

4. Soit $z \in D(0, 2\pi)$; alors, $|z| < 2\pi$ et donc, d'après la question précédente, $f(z) \neq 0$; la fonction g est donc bien définie sur $D(0, 2\pi)$.

5. (a) On sait que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $e^z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}$, le rayon de convergence étant infini (par exemple parce que $z^k/k!$ tend vers 0 pour tout z).

(b) Pour tout $z \neq 0$, on a donc $f(z) = \frac{1}{z} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} - 1 \right) = \frac{1}{z} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{z^j}{(j+1)!}$ en posant $j = k - 1$.

Puisque $f(0) = 1$, l'égalité est encore vraie en 0.

6. La série entière $U(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^n$ a un rayon de convergence non nul, et $u_0 = 1$; la partie I. garantit qu'il existe $R > 0$ tel que $1/U(z) = g(z)$ soit défini et somme d'une série entière $V(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ sur $D(0, R)$.
7. (a) Pour tout $t \in]-2\pi, 2\pi[$, $G(t) - G(-t) = 2t + \frac{2t}{e^t - 1} - \frac{2t}{e^{-t} - 1} = 2t \left(\frac{(e^t - 1) + 1 - e^t}{e^t - 1} \right) = 0$ d'où le résultat.
- (b) Par combinaison linéaire, G est développable en série entière sur $] -R, R[$, et les coefficients de rang impair de son développement sont tous nuls.
Pour $t \in] -R, R[$, on a $G(t) = t + 2V(t) = 1 + (1 + 2b_1)t + \sum_{k=2}^{+\infty} 2b_k t^k$; on a donc $b_1 = -1/2$, et $b_k = 0$ pour tout $k \geq 3$ impair.

Partie IIB.

1. La restriction de g à $] -2\pi, 2\pi[$ prend ses valeurs dans \mathbb{R} ; donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\gamma_n = g^{(n)}(0)/n!$ est réel.
2. On sait déjà que $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = -1/2$ et $\gamma_3 = 0$. Pour calculer γ_2 , on peut par exemple effectuer un DL₂ de g : au voisinage de 0,

$$\frac{t}{e^t - 1} = \frac{t}{t + t^2/2 + t^3/6 + o(t^3)} = \frac{1}{1 + t/2 + t^2/6 + o(t^2)} = 1 - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{12} + o(t^2)$$

et donc $\gamma_2 = 1/12$.

3. On sait que, pour tout z , $f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{(k+1)!}$. D'après la partie I., si l'on pose $b_0 = 1$ et, pour tout $n \geq 1$, $b_n = -\sum_{j=1}^n \frac{b_{n-j}}{(j+1)!} = -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k}{(n-k+1)!}$, alors la série entière $T(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ a un rayon de convergence R non nul, et, au voisinage de 0, $T(z) = 1/f(z) = g(z)$.
Par unicité du développement en série entière, on a donc $b_n = \gamma_n$ pour tout n ; en particulier, pour tout $n \geq 1$, $\gamma_n = -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\gamma_k}{(n-k+1)!}$, ce qui fournit la relation demandée.

Remarque : il est peut-être plus simple d'écrire que la série entière produit de celle de f par celle de g est la série entière de la constante 1.

4. On a $\gamma_0 = 1 \in \mathbb{Q}$; et, si $\gamma_k \in \mathbb{Q}$ jusqu'au rang $n-1$, alors la relation $\gamma_n = -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\gamma_k}{(n-k+1)!}$ montre que $\gamma_n \in \mathbb{Q}$; par récurrence, les coefficients γ_n sont donc tous rationnels.
5. Vu en IIA.7.(b) : $\gamma_n = 0$ pour $n \geq 3$ impair.

Partie III.

1. Pour tout $t < \ln 2$, on a $0 < e^t < 2$ donc $e^t - 1 \in] -1, 1[$; on peut donc prendre $I =] -\ln 2, \ln 2[$.

Remarque : puisque le rayon de convergence de la série $S(z)$ est au moins 1, la fonction S est de classe C^∞ sur $] -1, 1[$; et h est de classe C^∞ sur I , et $h(I) \subset] -1, 1[$. La fonction S_h , qui est en fait la composée $S \circ h$, est donc de classe C^∞ sur I . Le reste de la partie III. est donc superflu. . .

2. La série $\sum a_n u^n$ converge au moins pour $u \in] -1, 1[$, et $h(t) \in] -1, 1[$ par hypothèse; donc $\sum a_n h(t)^n$ converge.
3. (a) La fonction exponentielle est continue sur le segment K , donc y est bornée; on peut toujours choisir un majorant de sa valeur absolue (?) qui soit strictement positif.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons f_n la fonction $t \mapsto a_n h(t)^n$. La fonction h est de classe C^1 sur I , de dérivée $t \mapsto -e^t$; donc, pour tout $n \geq 1$, f_n est de classe C^1 sur I , de dérivée $-na_n h(t)^{n-1} e^t$.

Soit K un segment inclus dans I . La fonction h est alors bornée et atteint ses bornes sur K ; si D_K est la borne supérieure de $|h|$ sur K , on a donc $D_K < 1$ (borne atteinte et $|h(t)| < 1$ sur I).

On a donc $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall t \in K \quad |f'_n(t)| \leq C_K n a_n (D_K)^{n-1}$. On sait que la série dérivée $\sum n a_n z^{n-1}$ a même rayon de convergence que $\sum a_n z^n$; puisque ce rayon est au moins 1, la série $C_K n a_n (D_K)^{n-1}$ converge.

Par suite, la série $\sum f'_n$ converge normalement, donc uniformément sur K ; puisque la série $\sum f_n$ y converge simplement, on sait que sa somme, S_h , est de classe C^1 sur I , de dérivée $\sum_{n \geq 1} f'_n$. Cela étant vrai pour tout segment $K \subset I$, la fonction S_h est finalement de classe C^1 sur I .

(c) Considérons la fonction $\Phi : z \mapsto (z-1) \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} z^n$. Comme vu plus haut, la série entière $\sum (n+1) a_{n+1} z^n$ a même rayon de convergence que $\sum a_n z^n$, donc au moins égal à 1; et $z-1$ est un polynôme, cas particulier de série entière de rayon de convergence infini. Le produit des deux est donc la somme d'une série entière $\sum u_n z^n$ de rayon de convergence au moins égal à 1.

D'autre part, on a vu en (b) que, pour $t \in I$, $\Phi(h(t)) = S'_h(t)$, ce qui achève la démonstration.

4. L'indication étant optionnelle, je m'en dispense. Supposons établi que S_h est de classe C^k sur I , ce que l'on a déjà fait pour $k=1$.

La série entière $\sum (n+1) a_{n+1} z^n$ a un rayon de convergence au moins égal à 1, donc vérifie les mêmes hypothèses que la série $\sum a_n z^n$. On peut donc aussi conclure que $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} h^n$ est de classe C^k sur I . La question 3.(b) montre alors que S'_h est elle aussi de classe C^k sur I , et donc S_h y est de classe C^{k+1} .

Par récurrence, la fonction S_h est donc de classe C^k pour tout k , donc de classe C^∞ sur I .

Partie IV.

1. On sait que, pour tout $x \in]-1, 1[$, $-\ln(1-x) = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{x^j}{j} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1}$.

Soit $t \in I \setminus \{0\}$. Par définition de I , on a $1 - e^t \in]-1, 1[$; par suite,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(1 - e^t)^k}{k+1} = \frac{1}{1 - e^t} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(1 - e^t)^{k+1}}{k+1} = \frac{\ln e^t}{1 - e^t} = \frac{1}{f(t)} = g(t)$$

La relation est trivialement vérifiée pour $t=0$.

2. (a) Voir le cours.

(b) Pour $k=0$, il n'existe pas d'entier naturel n tel que $n < k$, la phrase est donc vraie. Pour $k=1$, le seul n à examiner est 0, et on a effectivement $(h^1)^{(0)}(0) = h(0) = 0$.

Supposons le résultat établi à un rang k . Soit alors $n < k+1$; en écrivant $h^{k+1} = h^k \times h$, la formule de Leibniz donne

$$(h^{k+1})^{(n)}(0) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (h^k)^{(j)}(0) h^{(n-j)}(0)$$

Pour $j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, on a $j \leq n-1 < k$, et donc $(h^k)^{(j)}(0) = 0$ par hypothèse de récurrence; pour $j=n$, c'est le terme $h^{(n-j)}(0) = h(0)$ qui est nul; tous les termes de la somme sont donc nuls, ce qui achève la récurrence.

(c) Soient $(n, k) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n < k$ et H une fonction de classe C^∞ sur I . Alors

$$(Hh^k)^{(n)}(0) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (h^k)^{(j)}(0) H^{(n-j)}(0)$$

Pour tout $j \leq n$, on a $(h^k)^{(j)}(0) = 0$ d'après (b), puisque $j \leq n < k$; on a donc bien $(Hh^k)^{(n)}(0) = 0$.

(d) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $t \in I$; on peut alors écrire

$$g(t) = \sum_{k=0}^n \frac{h(t)^k}{k+1} + h(t)^{n+1} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{h(t)^{k-(n+1)}}{k+1} = \sum_{k=0}^n \frac{h(t)^k}{k+1} + h(t)^{n+1} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{h(t)^j}{j+n+2}$$

On vérifie aisément que la série entière $\sum \frac{z^j}{j+n+2}$ a un rayon de convergence égal à 1. En appliquant les résultats de la partie III. à cette série, on voit que la fonction $H : t \mapsto \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{h(t)^j}{j+n+2}$ est de classe C^∞ sur I .

On peut donc appliquer le résultat de la question (c) : puisque $n < n+1$, la dérivée n -ème de $h^{n+1}H$ s'annule en 0. Puisque, pour tout $t \in I$, $g(t) = \sum_{k=0}^n \frac{h(t)^k}{k+1} + h(t)^{n+1}H(t)$, on en déduit immédiatement le résultat demandé.

3. (a) Soit $t \in I$. Alors $h^k(t) = \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} e^{jt}$. Pour $n \geq 1$, le terme d'indice 0, constant, disparaît par dérivation, donc $(h^k)^{(n)}(t) = \sum_{j=1}^k (-1)^j \binom{k}{j} j^n e^{jt}$. Il ne reste qu'à prendre $t = 0$ pour obtenir la relation demandée.
- (b) Soit $n \geq 1$. On sait que $\gamma_n = g^{(n)}(0)/n!$. En tenant compte du fait que le terme d'indice 0 est nul dans l'expression de $g^{(n)}(0)$ trouvée en 2.(d), la question précédente donne donc

$$\gamma_n = \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^k \frac{(-1)^j}{k+1} \binom{k}{j} j^n$$