E3A MP épreuve 1 2015

Exercice 1

1

1.1

De manière classique $J^2 = nJ$.

1.2

$A = I + J$ et I et J commutent. Donc $A^2 = I + (n+2)J = (n+2)A - (n+1)I$. Ainsi le polynôme $P = X^2 - (n+2)X + n + 1$ est un annulateur de A.

1.3

$A(A - (n+2)I) = -(n+1)I$. Donc A est inversible d'inverse $\frac{(n+2)I-A}{n+1}$.

2

2.1

A est une matrice symétrique réelle. Elle est donc orthogonalement diagonalisable. D'où l'existence de $Q \in O_n(\mathbb{R})$ et de D diagonale telles que $A = QDQ^{-1}$.

2.2

$P = (X-1)(X-n-1)$ donc $Sp(A) \subset \{1, n+1\}$. A n'est pas scalaire donc $Sp(A) = \{1, n+1\}$. $A - I = J$ est de rang 1. Donc $D = Diag(1, \ldots, 1, n+1)$.

3

3.1

$U \mapsto^t UA - AU$ est un endomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$. $\mathcal{E}$ en est le noyau. C'est donc un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$.

3.2

$Q^{-1} =^t Q$ donc si $V =^t QUQ$, ${}^tUA = AU \Leftrightarrow^t UQDQ^{-1} = UQDQ^{-1}U \Leftrightarrow^t VD = DV$.

3.3

Soit $\theta : U \mapsto^t QUQ$. Le point (3b) montre que θ est un isomorphisme entre $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$. Par conséquent $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ sont de même dimension.

3.4

Posons $V = \begin{pmatrix} V_1 & C \\ L & \alpha \end{pmatrix}$. Un calcul par bloc donne ${}^tVD = DV \Leftrightarrow^t V_1 = V_1, C = (n+1)^tL$. Donc $\mathcal{F} = \{\begin{pmatrix} V_1 & (n+1)^tL \\ L & \alpha \end{pmatrix} | V_1 \in S_n(\mathbb{R}), \alpha \in \mathbb{R}, L \in M_{1,n-1}(\mathbb{R})\}$. Ainsi $\dim(\mathcal{F}) = \frac{n(n+1)}{2} = \dim(\mathcal{E})$.

4

4.1

φ est bilinéaire par linéarité du produit matriciel, symétrique car A est symétrique. Soit x un vecteur de $\mathbb{R}^n$. Soit X le vecteur colonne représentant x dans la base canonique. Soit $(\xi_i) = QX$. $\varphi(x,x) = \sum_{i=1}^{n-1} \xi^2 + (n+1)\xi_n^2$ donc $\varphi(x,x) \leq 0$ et $\varphi(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. φ est un produit scalaire.

4.2

Soit $(x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2$. $\varphi(u(x),y) =^t X^tUAY =^t AUY = \varphi(x, u(y))$. Donc u est symétrique pour le produit scalaire φ.

4.3

Par le théorème spectral, u est diagonalisable dans une base $\mathcal{B}_1$ orthonormée pour φ. Soit $\Delta = Mat(u, \mathcal{B}_1)$ et B la matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B}_1$. Alors, Δ est diagonale, $U = B\Delta B^{-1}$ et ${}^tBAB = I_n$.

Exercice 2

1

En développant le déterminant par rapport à sa dernière colonne, on obtient $P_{n+1} = (X - a_{n+1})P_n - b_n^2 P_{n-1}$.

2

2.1

A est une matrice symétrique réelle : elle est donc diagonalisable.

2.2

La matrice considérée est triangulaire inférieure : son déterminant vaut donc $\prod_{i=1}^{n-1} b_i$. En particulier, il est non nul.

2.3

λ est valeur propre de A donc $\lambda I_n - A$ possède un rang $< n$. De plus, par (2b), les $n-1$ dernières colonnes de $\lambda I_n - A$ sont libres. Donc $\lambda I_n - A$ est de rang $n-1$.

2.4

A est diagonalisable, donc la dimension de chaque espace propre est égale à la multiplicité de la valeur propre dans le polynôme caractéristique. Or, chaque espace propre est de dimension 1 (2c). Donc A admet n valeurs propres distinctes.

3

3.1

En utilisant le 1, on obtient

$$\begin{array}{rcl}\Delta_n & = & P_nP'_{n+1} - P'_nP_{n+1} \\ & = & P_n(P_n + (X - a_{n+1})P'_n - b_n^2P'_{n+1}) - P'_n((X - a_{n+1})P_n - b_n^2P_{n-1}) \\ & = & P_n^2 + b_n^2\Delta_{n-1}\end{array}$$

3.2

$\Delta_1 = (X - a_1)^2 + b_1^2$. Donc $\forall x \in \mathbb{R}, \Delta_1(x) > 0$. Par une récurrence immédiate à partir de 3a, $\forall n \geq 2, \forall x \in \mathbb{R}, \Delta_n(x) > 0$.

4

Soit α et β deux zéros consécutifs de P_n. P_{n+1} ne s'annule pas en α et β car Δ_n ne s'annule pas. Soit $F_n = \frac{P_{n+1}}{P_n}$. F_n est strictement croissante sur $]\alpha, \beta[$ car sa dérivée est du signe de Δ_n. Or $|F_n|$ tend vers l'infini en α et β. Par le théorème des valeurs intermédiaires P_{n+1} s'annule entre α et β.

Exercice 3

1

$x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ est prolongeable par continuité en 0 et donc intégrable sur $[0, \pi]$. $\frac{\cos(x)}{x}$ admet une limite en $+\infty$. On peut donc effectuer une intégration par partie : $\int_\pi^\infty \frac{\sin(x)}{x}dx = [\frac{-\cos(x)}{x}]_\pi^\infty - \int_\pi^\infty \frac{\cos(x)}{x^2}dx$. Or $\frac{\cos(x)}{x^2} = O(\frac{1}{x^2})$ donc $\int_\pi^\infty \frac{\sin(x)}{x}dx$ converge.

2

2.1

Un développement limité donne $\frac{1-\cos(\alpha t)}{t^2}e^{-itx} \sim \frac{\alpha^2}{2}$, donc la fonction est prolongeable par continuité en 0.

2.2

Sur $]0, 1]$, la fonction est intégrable car continue et prolongeable par continuité en 0. Sur $[1, +\infty[$, $0 \leq \frac{1-\cos(\alpha t)}{t^2}e^{-itx} \leq \frac{1}{t^2}$ D'où l'intégrabilité par comparaison (Riemann).

3

3.1

$\bar{I} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos(\alpha t)}{t^2}e^{itx}dt$. Le changement de variable $u = -t$ conduit alors à $I = \bar{I}$.

3.2

On effectue une intégration par parties, puis le changement de variable $t = Bx$ pour obtenir l'égalité souhaitée.

3.3

Soit $A > 0$ et $B > 0$. $\int_A^{+\infty} \frac{1-\cos(Bx)}{x^2} dx = \frac{1-\cos(AB)}{A} + B \int_{AB}^{\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$. En faisant tendre A vers 0, on obtient $\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(Bx)}{x^2} dx = \frac{B\pi}{2}$. cos est paire, donc pour B quelconque, on obtient $\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(Bx)}{x^2} dx = \frac{|B|\pi}{2}$ (vrai aussi pour $B = 0$).

3.4

$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{cos(tx)-1}{t^2} dt - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{cos(t(x+\alpha))-1}{t^2} dt - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{cos(t(x-\alpha))-1}{t^2} dt = \frac{\pi}{4}(|\alpha + x| + |\alpha - x| - 2|x|)$

Exercice 4

1

$1 - p = P(b' = 0|b = 1), q = P(b' = 0|b = 0), 1 - q = P(b' = 1|b = 0)$

2

Par la formule des probabilités totales, $P(b' = 1) = P(b' = 1 \wedge b = 1) + P(b' = 1 \wedge b = 0) = P(b' = 1|b = 1)P(b = 1) + P(b' = 1|b = 0)P(b = 0) = p\alpha + (1 - q)(1 - \alpha)$.

3

Par la formule de Bayes, $P(b = 1|b' = 1) = \frac{P(b=1)P(b'=1|b=1}{P(b'=1)} = \frac{\alpha p}{p\alpha+(1-q)(1-\alpha)}$.

4

$P(X = k) = P(X = k|b = 0)P(b = 0) + P(X = k|b = 1)P(b = 1) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} (1 - q)^k q^{n-k}(1 - \alpha) + \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k(1 - p)^{n-k}\alpha$.

5

$E(X) = n(1 - q)(1 - \alpha) + np\alpha$.

6

$P(b = 1|X = k) = \frac{P(X=k|b=1)P(b=1)}{P(X=k)}$ c'est à dire $P(b = 1|X = k) = \frac{p^k(1-p)^{n-k}\alpha}{(1-q)^k q^{n-k}(1-\alpha)+p^k(1-p)^{n-k}\alpha}$.

7

Désormais $p = q$

7.1

On cherche k tel que $P(b = 1|X = k) > \frac{1}{2}$. Sachant que $q = p$ et $\frac{1}{2} < p < 1$, ceci équivaut à $\frac{1}{2}(n - \frac{\ln(\frac{1-\alpha}{\alpha})}{\ln(\frac{1-p}{p})}) < k$

7.2

Si $\alpha = \frac{1}{2}$, la condition devient $\frac{n}{2} < k$.

8

Ici $\alpha = \frac{1}{2}$

8.1

$$f(n) = \sum_{k<\frac{n}{2}} P(X=k)P(b=1|X=k) + \sum_{k\geq\frac{n}{2}} P(X=k)P(b=0|X=k)$$

8.2

En remplaçant les probabilités par leurs expressions, on obtient : $f(n) =$

$$\sum_{k<\frac{n}{2}} \frac{\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}(1-p)^k p^{n-k}(1-\alpha) + \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k(1-p)^{n-k}\alpha}{1+(\frac{p}{1-p})^{n-2k}} + \sum_{k\geq\frac{n}{2}} \frac{\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}(1-p)^k p^{n-k}(1-\alpha) + \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k(1-p)^{n-k}\alpha}{1+(\frac{p}{1-p})^{2k-n}}$$

8.3

```
def bin(n,p):
    if n<p :
        return(0)
    else:
        if n==p :
            return(1)
        else :
            if p==0 :
                return(1)
            else:
                return(bin(n-1,p-1)+bin(n-1,p))

p=0.95

def f(n):
    s=0
    for k in range(0,n+1):
        if k < n/2 :
            s+=(1/2*bin(n,k)*(1-p)**k*p**(n-k)+(1-p)**(n-k)*p**k)*(1/(1+(p/(1-p)**(n-2*k))))
        else:
            s+=(1/2*bin(n,k)*(1-p)**k*p**(n-k)+(1-p)**(n-k)*p**k)*(1/(1+(p/(1-p)**(-n+2*k))))
        return(s)
```