E3A MP épreuve B 2014

Exercice 1
1) Soit $(u,v) \in \mathcal{L}(E)$ tels que $u \circ v = v \circ u$.
Soit $x \in \ker(u)$. $u(v(x)) = v(u(x)) = v(0) = 0$ donc $v(x) \in \ker(u)$.
$\underline{\ker(u) \text{ est stable par } v.}$

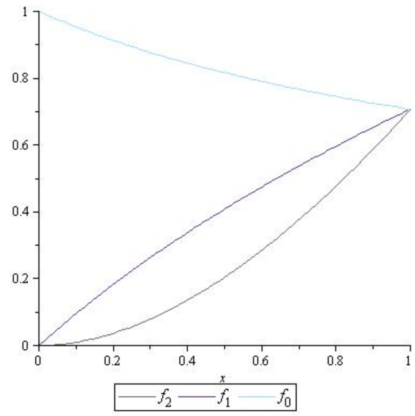
Soit $x \in \mathrm{Im}(u)$. Soit $y \in E$ tel que $x = u(y)$. $v(x) = v(u(y)) = u(v(y))$ donc $v(x) \in \mathrm{Im}(u)$.
$\underline{\mathrm{Im}(u) \text{ est stable par } v.}$

2)Soit $x \in \mathrm{Im}(u)$. Soit $y \in E$ tel que $x = u(y)$. $u(x) = u^2(y) = 0$ donc $x \in \ker(u)$.
$\underline{\mathrm{Im}(u) \subset \ker(u).}$

3) On en déduit que $\mathrm{rg}(u) \leq \dim(\ker(u)$. Par le théorème du rang, on obtient $\underline{\mathrm{rg}(u) \leq \frac{n}{2}.}$

2)
a)Si $n = 2$ et $u \neq 0$, (3) conduit à $\mathrm{rg}(u) = 1 = \dim(\ker(u))$.
Alors $\underline{D = \ker(u) = \mathrm{Im}(u) \text{ est une droite}}$
b)
(i) Soit v telle que $u \circ v = v \circ u$ et $v^2 = 0$. Par (1) on sait que $\underline{D = \mathrm{Im}(u) \text{ est stable par } v.}$
(ii) D est donc propre pour v. Or $\mathrm{sp}(v) = \{0\}$.
Donc $v = 0$ ou $D = \ker(v) = \mathrm{Im}(v)$. Dans les deux cas $u \circ v = 0$.
c) De même, on a $w = 0$ ou $D = \ker(w) = \mathrm{Im}(w)$. Dans les deux cas $v \circ w = 0$.
5)
a)Posons, pour $1 \leq i \leq m-1$, $v = u_1 \circ \cdots \circ u_i$. v et u_{i+1} commutent, donc par (1), F_i est stable par u_{i+1}.
b) On effectue une récurrence sur i :
$(H_i) \dim(F_i) \leq \dfrac{n}{2^i}$.
(H_1) est obtenu par (3).
Supposons (H_{i_0}) pour $i_0 \geq 1$. Soit $\tilde{u}_{i_0+1}$ le morphisme induit par u_{i_0+1} sur F_{i_0}. $\tilde{u}_{i_0+1}^2 = 0$. En appliquant l'hypothèse de récurrence et le résultat du (3), on déduit $\mathrm{rg}(\tilde{u}_{i_0+1}) \leq \dfrac{n}{2^{i_0+1}}$. Or $\mathrm{Im}(\tilde{u}_{i_0+1}) = F_{i_0+1}$ car les (u_i) commutent. D'où (H_{i_0+1}). Ceci achève la récurrence.
c) Si $n < 2^m$, $\dim F_m < 1$ donc $\dim F_m = 0$. Ainsi $\underline{u_1 \circ \cdots \circ u_m = 0}$.
6)
a) Par le théorème du rang, $\dim(\ker(A)) + \dim(\mathrm{Im}({}^tA)) = n$. De plus si $x \in \ker(A) \cap \mathrm{Im}({}^tA)$, $Ax = 0$ et $x = {}^tAy$ donc $A^tAy = 0$ et $\|Ay\| = 0$ donc $x = 0$. Ainsi $\underline{E = \ker(A) \oplus \mathrm{Im}({}^tA).}$
b)$\mathrm{Im}(A + {}^tA) \subset \mathrm{Im}(A) + \mathrm{Im}({}^tA)$. De plus les deux sous-espaces sont de même dimension $2\mathrm{rg}(A)$. Donc $\underline{\mathrm{Im}(A + {}^tA) = \mathrm{Im}(A) + \mathrm{Im}({}^tA).}$

Exercice 2
1) Cours.
2)
a) $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0,1], f_n'(x) = \dfrac{x^{n-1}(2n + (2n-1)x)}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}}$ donc sur $[0,1]$, f_0 est strictement décroissante et f_n est strictement croissante pour $n \geq 1$.
b)



c) (f_n) converge simplement vers f définie sur $[0,1]$ par $f(x)=0$ si $x<1$ et $f(1)=\frac{1}{\sqrt{2}}$. f n'est pas continue sur $[0,1]$, donc la convergence n'est pas uniforme.

4) $\forall x\in[0,1]$, la suite $(f_n(x))$ est décroissante donc par croissance de l'intégrale (u_n) est décroissante. La suite (f_n) vérifie les hypothèses du théorème de convergence dominée, dominée par f_0. Donc (u_n) converge vers 0.

5)Le résultat annoncé est obtenu par intégration par parties en intégrant x^n et en dérivant $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$.

6) Par une nouvelle application du théorème de convergence dominée, on montre que $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{\sqrt{1+x}^3}dx \to 0$.

On en déduit donc que $u_n \sim \frac{1}{2n}$.

7) On répète l'intégration par parties en intégrant de nouveau le polynôme et en dérivant $(1+x)^{-\frac{3}{2}}$. On obtient alors $(n+2)(n+1)u_n = \dfrac{n+2}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}^3} + \dfrac{3}{4}\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(1+x)^{\frac{5}{2}}}dx$.

Ainsi $\underline{\alpha_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \alpha_2 = \dfrac{1}{4\sqrt{2}}, \alpha_3 = \dfrac{3}{4}}$

8) Après développement asymptotique, on obtient $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{2}n} - \dfrac{3}{4\sqrt{2}n^2} + o(\dfrac{1}{n^2})$.

Ainsi $\underline{\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \beta = -\dfrac{3}{4\sqrt{2}}}$.

9)Par intégration par parties généralisée, en intégrant k fois x^n et en dérivant g on obtient

$$\int_0^1 x^n g(x)dx = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-1)^j g^{(j)}(1)}{(n+1)\dots(n+j+1)} + o(\frac{1}{n^k})$$

Chaque fraction rationnelle $\dfrac{(-1)^j g^{(j)}(1)}{(n+1)\dots(n+j+1)}$ possède un développement asymptotique. En regroupant les termes selon les puissances de n, on obtient bien

$$v_n = \sum_{j=1}^{k} \frac{\beta_j}{n^j} + o(\frac{1}{n^k})$$

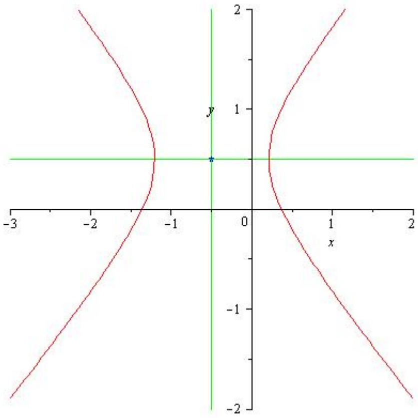
où $\underline{\beta_1 = g(1), \beta_2 = g'(1) - g(1)}$.

10)Posons $w_n = \int_0^1 x^n g(x)dx$. La question (9) nous permet d'affirmer que si la suite a une limite, c'est $h(1)$. Par convergence dominée, (w_n) converge vers 0. $(n+1)w_n - h(1) = (n+1)\displaystyle\int_0^1 x^n(h(x)-h(1))dx$. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $\alpha > 0$ tel que $x \in [1-\alpha, 1] \Rightarrow |h(x)-h(1)| < \varepsilon$. Alors $|(n+1)w_n - h(1)| \leq (n+1)\displaystyle\int_0^{1-\alpha} x^n(h(x)-h(1))dx + (n+1)\int_{1-\alpha}^1 x^n \varepsilon dx \leq 2\|h\|_\infty (1-\alpha)^{n+1} + \varepsilon$. Donc $nw_n \to h(1)$.

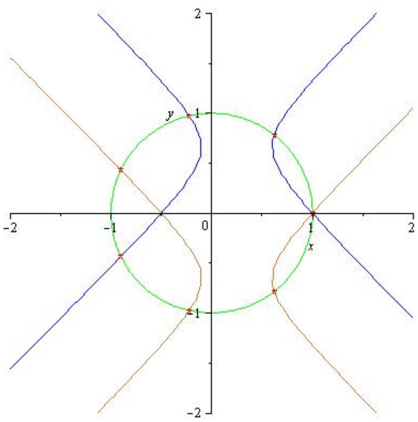
Exercice 3

1) L'équation réduite de $\mathcal{C}$ est $(x+\dfrac{a}{2})^2 - (y-\dfrac{b}{2})^2 = 1 + \dfrac{a^2}{4} - \dfrac{b^2}{4}$. $\mathcal{C}$ est une hyperbole (ou la réunion de

deux droites quand $a^2 - b^2 = 2$).
2) Les axes sont les droites (Ω, i) et (Ω, j) où Ω est le point d'affixe $\dfrac{-a+ib}{2}$.
3)



4)Si M d'affixe z est dans $\mathcal{C}$, il en est de même de M' d'affixe $-z-a+ib$. Donc $\dfrac{-a+ib}{2}$ est centre de symétrie de $\mathcal{C}$.
5) $2x = z+\bar{z}$ et $2iy = z-\bar{z}$. Donc en reportant dans l'équation, on obtient $p \in \mathcal{C} \Leftrightarrow z^2+\bar{z}^2+\bar{p}z+p\bar{z} = 1$.
Ainsi $\alpha_1 = \alpha_2 = 1, \beta_2 = p = \bar{\beta_1}$
6) On déduit que p est un point de $\mathcal{C}$ si et seulement si $4a^2 = 1$.
7) p et q sont racines du polynôme $X^2-(p+q)X+pq$, c'est à dire $P = X^2+X=2$.
8) w étant une racine 7^{ieme} de l'unité distincte de 1, $1+w+w^2+w^3+w^4+w^5+w^6 = 0$. Donc en développant, $(w+w^2+w^4)(w^{-1}+w^{-2}+w^{-4}) = 2$.
9)$w+w^2+w^4+w^{-1}+w^{-2}+w^{-4} = w^{-4}(1+w+w^2+w^3+w^5+w^6) = -w^{-4}w^4 = -1$. Par conséquent, $\{w+w^2+w^4, w^{-1}+w^{-2}+w^{-4}\} = \{p, q\}$.
10)On admet que $\Im(w+w^2+w^4) > 0$. Or $\Im(p) > 0$ et $\Im(p+q) = 0$, donc $w+w^2+w^4 = p$ et $w^{-1}+w^{-2}+w^{-4} = q$.
11) $(X-w)(X-w^2)(X-w^4) = X^3-(w+w^2+w^4)X^2+(w^{-1}+w^{-2}+w^{-4})X-1 = X^3-pX^2+qX-1$.
12)$1, w, w^2, w^4$ sont racines de $(1-X)(X^3-pX^2+qX-1)$, c'est à dire de $X^4+qX^3-X^2+pX^2+1$.
13) Soit $z \in \mathbb{C}$. $Z \in U \cap \mathcal{C}$ ssi $|z| = 1$ et z satisfait l'équation de la question (3). Après simplification, $Z \in U \cap \mathcal{C}$ ssi $|z| = 1$ et z est racine de $X^4+qX^3-X^2+pX^2+1$.
Or les racines de $X^4+qX^3-X^2+pX^2+1$ sont de module 1. Donc Les points d'intersection de U et C sont $1, w, w^2, w^4$.
14)
a) L'image de p est $\bar{p}$.
b)



c)L'intersection de U avec $\mathcal{C} \cup \sigma(\mathcal{C})$ est $\{w, w^2, w^4, w^{-1}, w^{-2}, w^{-4}, 1\}$.