e3a

CONCOURS ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - POLYTECH

Épreuve de Mathématiques A MP

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

084

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Tournez la page S.V.P.

Problème

On étudie dans ce problème quelques propriétés des fonctions de Bessel, obtenues à partir de l'équation différentielle :

$$(E_\alpha) \qquad x^2y'' + xy' + (x^2 - \alpha^2)y = 0$$

où α est un paramètre réel positif.

Partie I

1. Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $z'' + z = 0$.

2. Pour deux réels A et B, déterminer un développement limité à l'ordre 1 en 0 de la fonction $x \mapsto A\cos x + B\sin x$.

3. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour que la fonction

$$x \mapsto \frac{A\cos x + B\sin x}{\sqrt{x}}$$

admette une limite finie en 0^+. Cette condition étant satisfaite, donner un équivalent de $\frac{A\cos x+B\sin x}{\sqrt{x}}$ lorsque x tend vers 0^+.

Partie II

On considère dans cette partie l'équation différentielle :

$$(E_{\frac{1}{2}}) \qquad x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0$$

dont on cherche les solutions sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

4. Que peut-on dire de l'ensemble des solutions sur $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle $(E_{\frac{1}{2}})$?

5. Soit y une fonction de classe C^2 sur $]0, +\infty[$ et soit z la fonction définie par :

$$z: \begin{array}{ccc}]0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^{\frac{1}{2}}y(x) \end{array}$$

Démontrer que y est solution de $(E_{\frac{1}{2}})$ si, et seulement si, z est solution d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants.

6. Résoudre l'équation différentielle $(E_{\frac{1}{2}})$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

7. Démontrer que l'ensemble des solutions de $(E_{\frac{1}{2}})$ sur $]0, +\infty[$ qui possèdent une limite finie en 0 est un espace vectoriel de dimension 1.

8. Démontrer qu'il existe une unique solution de $(E_{\frac{1}{2}})$ sur $]0, +\infty[$, notée $f_{\frac{1}{2}}$, telle que :

$$f_{\frac{1}{2}}(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \sqrt{\frac{2x}{\pi}}$$

Partie III

Dans cette partie, α est un réel fixé, $\alpha \geq 0$ et on considère les équations différentielles :

$$\begin{aligned} (E_\alpha) \qquad & x^2y'' + xy' + (x^2 - \alpha^2)y = 0 \\ (E'_\alpha) \qquad & xz'' + (2\alpha + 1)z' + xz = 0 \end{aligned}$$

9. On rappelle la définition de la fonction Γ :

$$\begin{aligned} \Gamma : \mathbb{R}_+^* &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Démontrer que $\Gamma(1) = 1$ et, pour tout $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

10. On considère une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ dont le rayon de convergence est noté R et dont la somme sur l'intervalle $]-R, R[$ est notée S. On suppose dans cette question que R est strictement positif.

10. a. Rappeler une définition du rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$.

10. b. On suppose dans cette question que S est solution de l'équation différentielle (E'_α) sur $]-R, R[$. Démontrer que $a_1 = 0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (n+1)(n+1+2\alpha)a_{n+1} + a_{n-1} = 0$$

11. On suppose ici que la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ satisfait les deux conditions obtenues à la question précédente.

11. a. Démontrer que $a_{2n+1} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

11. b. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$.

11. c. Démontrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$: $a_{2n} = \dfrac{(-1)^n\Gamma(\alpha+1)}{n!2^{2n}\Gamma(n+\alpha+1)}a_0$.

12. Préciser la nature de l'ensemble des solutions sur $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle (E_α).

13. Soit $y :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. On définit la fonction z :

$$\begin{array}{rccl} z : &]0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^{-\alpha}y(x) \end{array}$$

Démontrer que y est solution de (E_α) sur $]0, +\infty[$ si, et seulement si, z est solution de (E'_α) sur $]0, +\infty[$.

14. En déduire que la fonction f_α définie sur $]0, +\infty[$ en posant :

$$\forall x > 0,\ f_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!2^{2n+\alpha}\Gamma(n+\alpha+1)} x^{2n+\alpha}$$

est solution de (E_α) sur $]0, +\infty[$.

15. Déterminer un équivalent de $f_\alpha(x)$ lorsque x tend vers 0.

Dans la suite du problème, on considère le cas particulier où $\alpha = p$ est un entier naturel et f_p est la solution de (E_p) définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_p(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}$$

(insistons sur le fait que cette fonction f_p est définie sur $\mathbb{R}$).

16. Pour tout entier $p \geq 1$ et tout réel x, expliciter $f_{p-1}(x) - f_{p+1}(x)$ comme somme d'une série entière. En déduire l'existence d'une constante k que l'on précisera telle que $f_{p-1}(x) - f_{p+1}(x) = kf_p'(x)$.

Partie IV

Dans cette partie, $p \in \mathbb{N}$ est un entier naturel fixé et on considère la fonction f_p définie dans la partie précédente. On définit également une fonction g_p sur $\mathbb{R}$ en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g_p(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(pt - x \sin t)\, dt$$

17. Démontrer que g_p est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et expliciter (sous forme intégrale) les fonctions g_p' et g_p''.

18. En intégrant par parties $g_p'(x)$, vérifier que g_p est solution de l'équation différentielle (E_p).

19. Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, on note $w_n = \displaystyle\int_0^\pi \sin^n(t)\, dt$.

19. a. Démontrer que pour tout $n \geq 2$, $nw_n = (n-1)w_{n-2}$.

19. b. Donner l'expression de w_{2n} en fonction de n.

20. Établir l'égalité :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g_1(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(t) \sin(x \sin t)\, \mathrm{d}t$$

puis démontrer que g_0 et g_1 sont développables en série entière sur $\mathbb{R}$.

21. Démontrer les égalités de fonctions $g_0 = f_0$ et $g_1 = f_1$.

22. Démontrer que pour tout entier $p \geq 1$ et tout réel $x \in \mathbb{R}$:

$$g_{p-1}(x) - g_{p+1}(x) = 2g_p'(x)$$

23. Démontrer que, pour tout entier $p \in \mathbb{N}$, les fonctions g_p et f_p sont égales.

Partie V

On considère dans cette partie un réel $x \in \mathbb{R}$ fixé et on définit la fonction :

$$g: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cos t}) \end{array}$$

(où Re *désigne la partie réelle). On reprend par ailleurs les notations définies dans les parties précédentes.*

24. Démontrer que g est périodique de période 2π.

25. Les coefficients de Fourier trigonométriques de g sont notés a_n ($n \in \mathbb{N}$) et b_n ($n \in \mathbb{N}^*$). Rappeler les expressions de a_n et b_n et étudier la convergence de la série de Fourier de g (on donnera l'énoncé complet du théorème utilisé).

26. Déterminer b_n pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

27. Démontrer que g est π-périodique et que $a_{2k+1} = 0$ pour tout entier $k \in \mathbb{N}$.

28. Démontrer que, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, $a_{2k} = 2(-1)^k g_{2k}(x)$.

29. Démontrer que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cos t}) = g_0(x) + 2\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n g_{2n}(x)\cos(2nt)$$