E3A 2013 - MP - Maths B
Corrigé

Exercice n°1

1) a) C'est immédiat.

b) Il est clair que $\ker\varphi$ ne contient que la colonne nulle, donc φ est injective ; elle réalise donc $\boxed{\text{une bijection de } \ker A \text{ dans } \varphi(\ker A).}$

D'autre part, soit $Z = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2n}$, avec X et Y dans $\mathbb{C}^n$. Alors :

$$Z \in \ker M_A \iff \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = 0 \iff Y = 0 \text{ et } AX = 0 \iff X \in \ker A \text{ et } Z = \varphi(X)$$

et donc $\boxed{\ker M_A = \varphi(\ker A),}$ ce qui achève la démonstration.

c) Si $B \in \mathscr{M}_p(\mathbb{C})$, la formule du rang, appliquée à l'endomorphisme canoniquement associé à B, donne $\dim\ker B + \operatorname{rg} B = p$.
Les deux questions précédentes montrent que les sous-espaces $\ker A$ et $\ker M_A$ sont isomorphes, donc ont même dimension.
Compte tenu des dimensions de ces matrices, on en déduit $n - \operatorname{rg} A = 2n - \operatorname{rg} M_A$, soit $\boxed{\operatorname{rg} M_A = n + \operatorname{rg} A.}$

2) a) On obtient immédiatement $\boxed{{M_A}^2 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}.}$

b) On choisit, dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, P inversible et D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$. Posons $Q = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}$ et $E = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$. On vérifie immédiatement que $Q\begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = I_{2n}$, donc que Q est inversible, d'inverse $\begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{pmatrix}$; et que $\boxed{QEQ^{-1} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} = {M_A}^2.}$ Puisque E est diagonale, $\boxed{{M_A}^2 \text{ est bien diagonalisable.}}$

c) On vérifie immédiatement que $\boxed{\text{l'inverse de } {M_A}^2 \text{ est } \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix}.}$

d) Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres deux à deux distinctes de ${M_A}^2$. Puisque ${M_A}^2$ est diagonalisable, le polynôme $\prod_{k=1}^{p}(X - \lambda_k)$ annule ${M_A}^2$, et donc $R = \prod_{k=1}^{p}(X^2 - \lambda_k)$ annule M_A.
Puisque ${M_A}^2$ est inversible, ses valeurs propres sont non nulles, et donc chaque λ_k a deux racines carrées distinctes μ_k et $-\mu_k$; de plus, les λ_k étant distincts, les $2p$ nombres $\mu_1, -\mu_1, \ldots, \mu_p, -\mu_p$ sont deux à deux distincts.
On a alors $R = \prod_{k=1}^{p}(X - \mu_k)(X + \mu_k)$, ce qui montre que R est scindé à racines simples.
Puisque M_A admet un polynôme annulateur scindé à racines simples, on sait alors que $\boxed{M_A \text{ est diagonalisable.}}$

3) a) Soit $(X_1,\dots,X_{2n})$ une base de $\mathbb{C}^{2n}$ constituée de colonnes propres pour M_A, associées aux valeurs propres $\lambda_1,\dots,\lambda_{2n}$. Pour simplifier les écritures, on suppose qu'il existe p tel que $\lambda_k \neq 0$ si $k \leqslant p$, et $\lambda_k = 0$ pour $k > p$.
L'espace $\operatorname{Im} M_A$ est alors engendré par les colonnes $(AX_1,\dots,AX_{2n}) = (\lambda_1 X_1,\dots,\lambda_{2n} X_{2n})$.
Il est clair qu'on peut supprimer dans cette famille les vecteurs nuls, et diviser chacun des vecteurs restants par le λ_k associé, sans modifier le sous-espace engendré. On a donc $\boxed{\operatorname{Im} M_A = \operatorname{Vect}(X_1,\dots,X_p).}$
Les vecteurs X_k forment aussi une base de vecteurs propres pour ${M_A}^2$, associés aux valeurs propres ${\lambda_k}^2$. Le même raisonnement montre que l'image de ${M_A}^2$ est engendrée par ceux de ces vecteurs qui sont associés à une valeur propre non nulle ; on en déduit $\boxed{\operatorname{Im} {M_A}^2 = \operatorname{Vect}(X_1,\dots,X_p) = \operatorname{Im} M_A.}$

b) La question précédente montre, grâce à la formule du rang, que $\ker M_A$ et $\ker {M_A}^2$ ont même dimension.
De plus, si $X \in \ker M_A$, alors ${M_A}^2 X = M_A(M_A X) = 0$, donc $\ker M_A \subset \ker {M_A}^2$.
On en déduit que $\boxed{\ker M_A = \ker {M_A}^2.}$

c) Soit $X \in \ker A$. Un calcul immédiat montre que $\begin{pmatrix} 0 \\ X \end{pmatrix}$ est dans $\ker {M_A}^2$, donc dans $\ker M_A$ d'après la question précédente.
Mais on a vu en 1 que les éléments de $\ker M_A$ sont de la forme $\begin{pmatrix} Y \\ 0 \end{pmatrix}$, donc $X = 0$. Par suite, $\ker A = \{0\}$, ce qui suffit à prouver que $\boxed{A \text{ est inversible.}}$

d) Notons u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^{2n}$ canoniquement associé à ${M_A}^2$. Puisque M_A est diagonalisable, ${M_A}^2$ l'est aussi, et donc aussi u.
D'autre part, la forme de la matrice ${M_A}^2$ montre que le sous-espace F de $\mathbb{C}^{2n}$ engendré par les n premiers vecteurs de la base canonique est stable par u ; puisque u est diagonalisable, on sait qu'alors l'endomorphisme $\tilde{u}$ induit par u sur F l'est aussi.
Mais la matrice de $\tilde{u}$ est A, et donc $\boxed{A \text{ est diagonalisable.}}$

4) On a démontré : $\boxed{M_A \text{ est diagonalisable} \iff A \text{ est diagonalisable et inversible.}}$

Exercice n°2

1) a) Notons R ce rayon de convergence. Pour $x \in [-1,1]$, le terme général de la série tend vers 0, donc $R \geqslant 1$; mais ce terme diverge si $|x| > 1$, donc $R \leqslant 1$. Finalement, $\boxed{R = 1.}$

b) On sait déjà que I contient l'ouvert $]-1,1[$, et que la série diverge pour $|x| > 1$. Pour $|x| = 1$, le terme général de la série vaut $1/(2n+1)$, donc la série diverge ; par suite $\boxed{I = \,]-1,1[.}$

2) a) Pour tout $x \in I$, $xS(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$; cette fonction est donc la somme d'une série entière convergente sur I, le rayon de convergence de cette série vaut donc au moins 1. On sait qu'alors la somme est dérivable sur I, et que la fonction dérivée s'obtient par dérivation terme à terme. On a donc sur I : $\boxed{\dfrac{d}{dx}\big(xS(x)\big) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2}}$ (série géométrique de raison x^2).

b) On trouve facilement que $\boxed{a = b = 1/2 \text{ convient.}}$
Puisque $xS(x)$ est la primitive de cette fonction qui s'annule en 0, on a effectivement

$$\boxed{\forall x \in I \quad xS(x) = \frac{1}{2}\ln\Big(\frac{1+x}{1-x}\Big).}$$

3) a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons f_n la fonction $x \longmapsto x^{2n}/(2n+1)$. On applique le théorème d'intégration terme à terme des séries de fonctions.

- Pour tout n, la fonction f_n est continue par morceaux et intégrable sur $J =]0,1[$.
- La série $\sum f_n$ converge simplement sur J, et sa somme S y est continue par morceaux d'après 2-b).
- Pour tout n, $\int_J |f_n| = 1/(2n+1)^2$, et la série de terme général $1/(2n+1)^2$ converge.

On peut alors conclure que S est intégrable sur J, et que $\boxed{\int_0^1 S(x)\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{x^{2n}}{2n+1}.}$

b) C'est une paraphrase du a).

4) Soit $g :]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$, $t \longmapsto (\ln t)/(1-t^2)$. La fonction g est continue sur $]0,1[$. En 0, $g(t) \sim \ln t = o(1/\sqrt{t})$, donc g est intégrable sur $]0,1/2]$ par comparaison aux intégrales de Riemann. En 1, $\ln t \sim t-1$, donc g a pour limite $-1/2$, et donc est prolongeable par continuité ; elle est donc intégrable sur $[1/2,1[$. Par suite, $\boxed{g \text{ est intégrable sur }]0,1[.}$

5) On a $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\Big(\int_0^x \frac{dy}{1+y^2}\Big)dx = \int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\big[(\arctan x)^2\big]_0^1$ soit $\boxed{J = \frac{\pi^2}{32}.}$

6) La fonction à intégrer est définie et continue sur $[0,\pi/4[$. On a d'autre part, pour tout $\theta \in [0,\pi/4[$, $\dfrac{\ln(2\cos^2\theta)}{2\cos 2\theta} = \dfrac{\ln(1+\cos 2\theta)}{2\cos 2\theta}$, de la forme $\dfrac{\ln(1+u)}{2u}$, où $u = \cos 2\theta$ a pour limite 0 en $\pi/4$. La fonction étudiée a donc pour limite $1/2$ en $\pi/4$, donc y est prolongeable par continuité ; $\boxed{\text{elle est donc finalement intégrable sur } [0,\pi/4[.}$

7) a) On a $K+L = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\ln(\sin^2 2\theta)}{2\cos 2\theta}\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} \frac{\ln(\sin 2\theta)}{1-\sin^2 2\theta}\,(2\cos 2\theta\,d\theta)$. Le changement de variable $t = \sin 2\theta$ donne donc immédiatement $\boxed{K+L = \frac{I}{2}.}$

b) On a $K-L = -\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\ln(\tan^2\theta)}{2\cos 2\theta}\,d\theta = -\int_0^{\pi/4} \frac{\ln(\tan\theta)}{1-\tan^2\theta}\,(1+\tan^2\theta)\,d\theta$. Le changement de variable $t = \tan\theta$ donne donc immédiatement $\boxed{K-L = -I.}$

c) En additionnant les deux résultats précédents, on obtient $I = -4K = -4J$ soit $\boxed{I = -\frac{\pi^2}{8}.}$

8) Soient a et b tels que $0 < a \leqslant b < 1$. Puisque $x \longmapsto \dfrac{1}{2}\ln\Big(\dfrac{1+x}{1-x}\Big)$ est une primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{1-x^2}$, une intégration par parties donne

$$\int_a^b \frac{1}{2x}\ln\Big(\frac{1+x}{1-x}\Big)\,dx = \Big[\frac{\ln x}{2}\,\ln\Big(\frac{1+x}{1-x}\Big)\Big]_a^b - \int_a^b \frac{\ln x}{1-x^2}\,dx$$

En 0, $\ln x \ln(1+x) \sim x\ln x$ qui tend vers 0, et de même $\ln x \ln(1-x)$ a pour limite 0 en 0. L'expression entre crochets a donc pour limite 0 en 0.

De même, en posant éventuellement $u = 1-x$, on voit que $\ln x \ln(1-x)$ a pour limite 0 en 1, et que donc l'expression entre crochets a pour limite 0 en 1.

En faisant tendre a vers 0 et b vers 1, on obtient donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2x}\ln\Big(\frac{1+x}{1-x}\Big)\,dx = -\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2}\,dx.$

Compte tenu de 3)b) et 7)c), on a donc $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.}$

Exercice n°3

1) Les asymptotes ont pour équations $bx = ay$ et $bx = -ay$, donc ont pour vecteurs directeurs respectifs (a, b) et $(a, -b)$. Les asymptotes sont donc orthogonales si et seulement si $a^2 - b^2 = 0$, soit $\boxed{a = b}$ puisque a et b sont positifs.

2) Avec $b = 0$, l'équation devient $x^2 - y^2 = a^2$, soit $(x - y)(x + y) = a^2$. Posons $X = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x - y)$ et $Y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x + y)$. On a alors $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ avec $P = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

La matrice P est orthogonale (matrice de rotation d'angle $\pi/4$), donc P^{-1}, elle aussi orthogonale, est la matrice de passage de la base orthonormée $\mathscr{B} = (\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ à une autre base orthonormée $\mathscr{B}' = (\vec{I}, \vec{J})$.

Si (x, y) sont les coordonnées d'un point M dans $(O, \mathscr{B})$, les formules de passage montrent que (X, Y) sont les coordonnées du même point dans le repère $(O, \mathscr{B}')$. L'équation de l'hyperbole dans ce dernier repère est donc $\boxed{XY = a^2/2.}$

3) a) L'équation traduit la condition $\Omega M^2 = R^2$, soit $\boxed{(X - \alpha)^2 + (Y - \beta)^2 = R^2,}$ ou, en développant, $\boxed{X^2 + Y^2 - 2\alpha X - 2\beta Y = R^2 - \alpha^2 - \beta^2.}$

b) Soit $M(X, Y)_{\mathscr{B}'}$ un point de l'hyperbole. Puisque $XY = k \neq 0$, on a forcément $X \neq 0$, et donc $Y = k/X$. En remplaçant dans l'équation du a), on voit après calculs que M est sur le cercle $\mathscr{C}$ si et seulement si $\boxed{X^4 - 2\alpha X^3 + (\beta^2 + \alpha^2 - R^2)X^2 - 2\beta k X + k^2 = 0.}$
Les abscisses X_A, X_B, X_C et X_D vérifients donc cette relation.

c) Les quatre points étant distincts et sur l'hyperbole, leurs abscisses sont forcément distinctes ; ce sont donc les quatre racines du polynôme trouvé en b). Les relations entre coefficients et racines montrent alors que $\boxed{X_A X_B X_C X_D = k^2 = a^4/4.}$

4) Supposons réciproquement la relation $X_A X_B X_C X_D = k^2$ vérifiée. On peut alors développer le polynôme $(X - X_A)(X - X_B)(X - X_C)(X - X_D)$ sous la forme $X^4 + pX^3 + qX^2 + rX + k^2$.
Posons $\alpha = -p/2$ et $\beta = -r/(2k)$. Soit X l'abscisse de l'un des quatre points et Y son ordonnée. Puisque X est racine du polynôme précédent et $X = k/Y$, on a

$$X^2 - 2\alpha X + q - \frac{2k\beta}{X} + \frac{k^2}{X^2} = 0 \quad \text{d'où} \quad X^2 - 2\alpha X + q - 2\beta Y + Y^2 = 0$$

soit finalement $\boxed{(X - \alpha)^2 + (Y - \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 - q.}$

Cette relation étant vérifiée par les quatre points, on a donc forcément $\alpha^2 + \beta^2 - q > 0$ (strictement car les points sont distincts) ; c'est donc l'équation d'un cercle, de centre (α, β) et de rayon $R = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - q}$.

$\boxed{\text{Les quatre points appartiennent donc bien à un même cercle.}}$