Concours ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - ARCHIMEDE

Épreuve de Mathématiques A MP

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

Tournez la page S.V.P.

L'objet du problème est l'étude des deux suites récurrentes doubles définies par :

$$u_0 = a, u_1 = b, \forall n \geqslant 0, u_{n+2} = \frac{2}{u_{n+1} + u_n} \text{ et } v_0 = a, v_1 = b, \forall n \geqslant 0, v_{n+2} = \frac{1}{\sqrt{v_{n+1}v_n}}$$

où a et b sont deux réels strictement positifs.

Partie I : étude de la suite (v_n)

Soit $v_0 > 0$ et $v_1 > 0$. On considère la suite définie pour $n \geqslant 0$ par : $v_{n+2} = \dfrac{1}{\sqrt{v_{n+1}v_n}}$.

1. Quelles sont les limites possibles, finies ou infinies, de la suite (v_n) ? (On justifiera précisément la réponse.)
2. On pose $w_n = \ln(v_n)$.
   (a) Déterminer une relation de récurrence vérifiée par la suite (w_n). *On note F l'espace vectoriel complexe des suites complexes vérifiant cette relation de récurrence.*
   (b) Déterminer une base de F.
   (c) Si $(x_n) \in F$, que peut-on dire quant à la convergence de (x_n) ?
3. Que peut-on en déduire concernant le comportement de la suite (v_n) ? sur le comportement de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$? de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}(v_n - 1)$?

Partie II : étude de normes matricielles

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dans la suite, on note $||.||_\infty$ la norme usuelle sur $\mathbb{C}^n$ définie pour $(z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ par :

$$||(z_1, z_2, \dots, z_n)||_\infty = \max(|z_1|, |z_2|, \dots, |z_n|)$$

et on identifie le n-uplet $(z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ au vecteur colonne $\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{C})$. Pour $A \in M_n(\mathbb{C})$, on note $|||A|||_\infty$ la norme de A pour la norme subordonnée à la norme $||.||_\infty$. On rappelle que celle-ci est définie de la manière suivante :

$$|||A|||_\infty = \sup_{X \in \mathbb{C}^n, ||X||_\infty \leqslant 1} ||AX||_\infty$$

Enfin, pour $Z \in \mathbb{C}^n$ et $P \in M_n(\mathbb{C})$, on pose :

$$N_P(Z) = ||PZ||_\infty$$

1. Soit $D \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice diagonale :

$$D = \begin{bmatrix} m_{1,1} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & m_{2,2} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & m_{n,n} \end{bmatrix}$$

   On pose $m = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |m_{i,i}|$.
   (a) Soit $Z \in \mathbb{C}^n$. Montrer que : $||DZ||_\infty \leqslant m||Z||_\infty$.
   (b) Déterminer $|||D|||_\infty$.

2. (a) Soit $P \in M_n(\mathbb{C})$. Montrer que N_P est une norme sur $\mathbb{C}^n$ si et seulement si P est une matrice inversible.

   Lorsque que P est inversible, on notera dorénavant $||.||_P$ pour N_P et la norme subordonnée à la norme $||.||_P$ sur $M_n(\mathbb{C})$ sera notée $|||.|||_P$.

   (b) On se donne une matrice $P \in GL_n(\mathbb{C})$. Pour $A \in M_n(\mathbb{C})$, montrer que :

$$|||A|||_P = |||PAP^{-1}|||_\infty$$

3. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Pour $M \in M_n(\mathbb{C})$, on note $\mathrm{sp}(M)$ l'ensemble des valeurs propres de M et on définit $\rho(M)$ par :

$$\rho(M) = \max\{|\mu|, \mu \in \mathrm{sp}(M)\}$$

   (a) Montrer que pour toute matrice $P \in GL_n(\mathbb{C})$, on a : $\rho(A) = \rho(PAP^{-1})$.

   (b) Soit $P \in GL_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\rho(A) \leqslant |||A|||_P$.

   (c) On suppose A diagonalisable. Montrer qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que $\rho(A) = |||A|||_P$.

   (d) Un exemple. Soit $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Déterminer $\rho(A)$. Déterminer l'inverse P^{-1} d'une matrice $P \in GL_3(\mathbb{C})$ telle que $|||A|||_P = \rho(A)$.

   (e) Un exemple. Soit $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{C})$ définie par $a_{i,j} = j$. Déterminer l'inverse P^{-1} d'une matrice $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $|||A|||_P = \rho(A)$.

4. Dans cette question, on suppose que $n = 2$. Soit donc $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$.

   (a) On pose $m = \max(|a| + |b|, |c| + |d|)$. Montrer que pour $Z \in \mathbb{C}^2$, on a : $||AZ||_\infty \leqslant m||Z||_\infty$. Déterminer $|||A|||_\infty$.

   (b) On suppose la matrice A non diagonalisable et on note f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^2$ canoniquement associé à A.

      i. Démontrer que $\mathrm{sp}(A)$ ne contient qu'un seul élément. On le note α.

      ii. Démontrer l'existence d'une base e de $\mathbb{C}^2$ telle que :

$$\mathrm{mat}_e(f) = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

      iii. Soit $\epsilon > 0$. Démontrer l'existence d'une base e' de $\mathbb{C}^2$ telle que :

$$\mathrm{mat}_{e'}(f) = \begin{bmatrix} \alpha & \beta' \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \text{ où } |\beta'| \leqslant \epsilon$$

      iv. En déduire l'existence d'une matrice $P \in GL_2(\mathbb{C})$ telle que $|||A|||_P \leqslant \rho(A) + \epsilon$.

   (c) Déterminer $\inf\limits_{P \in GL_2(\mathbb{C})} |||A|||_P$.

   (d) Un exemple. Soit $A = \begin{bmatrix} -3 & 8 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$. Calculer $|||A|||_\infty$ et montrer qu'il existe $P \in GL_2(\mathbb{C})$ telle que $|||A|||_P \leqslant 2$.

   (e) On suppose que $\rho(A) < 1$. Justifier l'existence d'une matrice $P \in GL_2(\mathbb{C})$ telle que $|||A|||_P < 1$. Que peut-on en déduire concernant la suite $(A^n)_{n \in \mathbb{N}}$?

Tournez la page S.V.P.

Partie III : étude de la suite (u_n)

Soit $u_0 > 0$ et $u_1 > 0$. On considère la suite définie pour $n \geqslant 0$ par : $u_{n+2} = \dfrac{2}{u_{n+1} + u_n}$. On considère la fonction :

$$f: \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}_+^*)^2 & \to & (\mathbb{R}_+^*)^2 \\ (x,y) & \mapsto & (y, \frac{2}{x+y}) \end{array}$$

On a alors : $f(u_n, u_{n+1}) = (u_{n+1}, u_{n+2})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Justifier que f est de classe C^1. *Dans la suite, on note respectivement* $\mathrm{d}f_{(x_0,y_0)}$ *et* $J_{(x_0,y_0)}$ *la différentielle et la matrice jacobienne de f au point* $(x_0, y_0) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$.
2. Déterminer les points fixes de f dans $(\mathbb{R}_+^*)^2$.
3. Déterminer la matrice $J_{(1,1)}$.
4. Démontrer l'existence d'une matrice $P \in GL_2(\mathbb{C})$ telle que $|||J_{(1,1)}|||_P = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
5. On fixe un réel α vérifiant $\frac{\sqrt{2}}{2} < \alpha < 1$.
   (a) Justifier l'existence d'un réel $\eta > 0$ tel que :
   $$\forall (x_0, y_0) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, ||(1,1) - (x_0, y_0)||_P \leqslant \eta \implies |||J_{(x_0,y_0)}|||_P \leqslant \alpha$$
   Dans la suite, on note D le disque fermé de centre $(1,1)$ et de rayon η pour la norme $||.||_P$ et on suppose qu'il existe un entier n_0 tel que $(u_{n_0}, u_{n_0+1}) \in D$.
   (b) Soit $(x_0, y_0) \in D \cap (\mathbb{R}_+^*)^2$. On définit, pour $t \in [0,1]$:
   $$\varphi(t) = f\Big((1,1) + t\big[(x_0, y_0) - (1,1)\big]\Big)$$
   Justifier que φ est de classe C^1 et obtenir une expression de $\varphi'(t)$ faisant intervenir la différentielle de f. En déduire :
   $$||(1,1) - f(x_0, y_0)||_P \leqslant \alpha ||(1,1) - (x_0, y_0)||_P$$
   (c) Démontrer que pour tout $n \geqslant n_0$, $(u_n, u_{n+1}) \in D$.
   (d) Démontrer que pour tout $n \geqslant n_0$, on a l'inégalité :
   $$||(1,1) - (u_n, u_{n+1})||_P \leqslant \alpha^{n-n_0} ||(1,1) - (u_{n_0}, u_{n_0+1})||_P$$
   (e) Obtenir que $u_n = 1 + O(\alpha^n)$.
   (f) Que peut-on en déduire concernant le comportement de la suite (u_n) ? sur le comportement de la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} u_n$? de la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} (u_n - 1)$?

Partie IV : suite de l'étude

On considère une suite réelle $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On rappelle qu'une valeur d'adhérence de (x_n) est un réel λ pour lequel il existe une suite $(x_{\varphi(n)})$ extraite de (x_n) qui converge vers λ. On rappelle que toute suite bornée admet une valeur d'adhérence et on admet que toute suite bornée admet une plus petite et une plus grande valeur d'adhérence.

1. (a) Soit (x_n) une suite bornée non convergente admettant λ pour valeur d'adhérence. Justifier l'existence d'un réel $\tau > 0$ tel que pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $n \geqslant N$ vérifiant $|x_n - \lambda| > \tau$. En déduire que (x_n) admet une valeur d'adhérence $\lambda' \neq \lambda$.
   (b) Montrer que toute suite bornée ayant une unique valeur d'adhérence est convergente.
   (c) Soit (x_n) une suite bornée. On note l_- sa plus petite valeur d'adhérence et l_+ sa plus grande. Montrer l'équivalence :
   $$(x_n) \text{ est convergente } \Leftrightarrow l_- = l_+$$

2. Dans cette question, (u_n) désigne la suite étudiée dans la partie III. On pose $\alpha = \min\{u_0, u_1, \frac{1}{u_0}, \frac{1}{u_1}\}$.

   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{\alpha}$. On note alors l_- et l_+ les plus petite et plus grande valeurs d'adhérences de (u_n).

   (b) Justifier l'existence d'une suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ de (u_n) telle que $(u_{\varphi(n)})$ et $(u_{\varphi(n)+1})$ convergent et $u_{\varphi(n)+2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l_-$. En déduire l'inégalité $l_- l_+ \geqslant 1$.

   (c) Montrer qu'on a : $l_- l_+ = 1$.

   (d) En considérant une suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ de (u_n) telle que $(u_{\varphi(n)})$, $(u_{\varphi(n)+1})$ et $(u_{\varphi(n)+2})$ convergent et $u_{\varphi(n)+3} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l_-$, obtenir l'égalité $l_- = l_+$ et conclure.

   (e) Que peut-on dire de l'hypothèse d'existence d'un entier n_0 tel que $(u_{n_0}, u_{n_0+1}) \in D$ dans la question 5.(a) de la partie III ?

IN CHOISY – 13 1044 – D'après documents fournis