e3a

CONCOURS ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - ARCHIMÈDE

Épreuve de Mathématiques B MP

Durée 3 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

<u>AVERTISSEMENT</u>

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte.

Tournez la page S.V.P.

Exercice I

Soit E un espace euclidien muni d'un produit scalaire noté $< \, , \, >$.

On note $\| \ \|$ la norme euclidienne associée à ce produit scalaire.

Pour tout π, endomorphisme de E, on note π^* son *endomorphisme adjoint*, c'est-à-dire l'unique endomorphisme vérifiant :

$$\forall x, y \in E, < \pi(x), y >=< x, \pi^*(y) > .$$

On dit qu'un endomorphisme π de E est un *projecteur* s'il vérifie $\pi^2 = \pi$. On dit que le projecteur π est *strict* si π n'est ni l'endomorphisme nul, ni l'identité Id_E.

Un projecteur π est dit *orthogonal* si les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Im}(\pi)$ et $\ker(\pi)$ sont orthogonaux.

1. Soit π un projecteur de E.
   (a) Démontrer que $E = \ker(\pi) \oplus \mathrm{Im}(\pi)$.
   (b) Dans le cas où π est un projecteur orthogonal, démontrer que :
      i. Tout vecteur x dans E vérifie : $\|\pi(x)\| \leqslant \|x\|$. Dans quel cas a-t'on l'égalité ?
      ii. Tout vecteur x dans E vérifie : $< \pi(x), x > \geqslant 0$. Dans quel cas a-t'on l'égalité ?
   (c) Démontrer que π est un projecteur orthogonal si et seulement si $\pi = \pi^*$.
2. On considère ici le cas particulier du plan euclidien : $E = \mathbb{R}^2$.
   (a) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Démontrer que M est la matrice d'un projecteur strict orthogonal sur une base orthonormée de E si et seulement si $d = 1 - a, b = c$ et $a(1-a) = b^2$.
   (b) Qu'impose cette dernière égalité pour la valeur a ?
   (c) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & 1-a \end{pmatrix}$ la matrice d'un projecteur strict orthogonal sur une base orthonormée de E. Exprimer le produit de matrices :

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & 1-a \end{pmatrix}.$$

   Justifier que la matrice N est diagonalisable et que ses valeurs propres sont toutes dans l'intervalle $[0, 1]$.
   (d) Soient π_1 et π_2 deux projecteurs stricts orthogonaux sur E. Démontrer que l'endomorphisme $\pi_1 \circ \pi_2$ est diagonalisable et que ses valeurs propres sont toutes dans l'intervalle $[0, 1]$.

3. Soient π_1 et π_2 deux projecteurs stricts orthogonaux sur un espace euclidien E de dimension $n \geqslant 1$.
   (a) Déterminer l'endomorphisme adjoint de $\pi_1 \circ \pi_2 \circ \pi_1$. En déduire que l'endomorphisme $\pi_1 \circ \pi_2 \circ \pi_1$ est diagonalisable sur une base orthonormée (on citera précisément le théorème utilisé) et que ses valeurs propres sont toutes dans l'intervalle $[0, 1]$.
   (b) Démontrer que le sous-espace vectoriel $\mathrm{Im}(\pi_1)$ est stable par l'endomorphisme $\pi_1 \circ \pi_2 \circ \pi_1$.
   (c) Démontrer que le sous-espace vectoriel $\mathrm{Im}(\pi_1)$ est stable par l'endomorphisme $\pi_1 \circ \pi_2$ et que celui-ci induit sur $\mathrm{Im}(\pi_1)$ un endomorphisme diagonalisable dont les valeurs propres sont dans l'intervalle $[0, 1]$.
   (d) Soit G le sous-espace vectoriel $(\mathrm{Im}(\pi_1) + \ker(\pi_2))$. On note $G^{\perp}$ son orthogonal dans E. Démontrer que $G^{\perp} = \ker(\pi_1) \cap \mathrm{Im}(\pi_2)$. Que vaut l'endomorphisme $\pi_1 \circ \pi_2$ sur $G^{\perp}$?
   (e) Démontrer que l'endomorphisme $\pi_1 \circ \pi_2$ est diagonalisable et que ses valeurs propres sont toutes dans l'intervalle $[0, 1]$.
   (f) Soit r_2 le rang de π_2. Démontrer que $\mathrm{Tr}(\pi_1 \circ \pi_2) \leqslant r_2$. Etudier le cas d'égalité.

Exercice II

Etant donné un entier naturel non nul n, $M_n(\mathbb{C})$ désigne la $\mathbb{C}$-algèbre des matrices (n, n) à coefficients dans $\mathbb{C}$. On désigne par I_n la matrice identité de $M_n(\mathbb{C})$.
Etant donnée une matrice M dans $M_n(\mathbb{C})$, on note $\chi_M(\lambda) = \det(\lambda I_n - M)$ son polynôme caractéristique.

Si A, B, C, D sont quatre matrices dans $M_n(\mathbb{C})$, on note $M_{A,B,C,D}$ la matrice de $M_{2n}(\mathbb{C})$ définie par blocs par :

$$M_{A,B,C,D} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

1. Soient A, B, C, D, E cinq matrices dans $M_n(\mathbb{C})$.
   (a) Exprimer la matrice produit $M_{A,B,C,D} M_{I_n,E,0_n,I_n}$.
   (b) On suppose la matrice A inversible. Justifier l'égalité :

$$\det M_{A,B,C,D} = \det A \det(D - CA^{-1}B).$$

2. On suppose que les matrices A et C commutent.

   (a) On suppose que la matrice A est inversible. Démontrer que $\det M_{A,B,C,D} = \det(AD - CB)$.

   (b) On ne suppose plus la matrice A inversible.

      i. Démontrer qu'il existe des matrices U et V dans $M_n(\mathbb{C})$ telles que le polynôme caractéristique de la matrice $M_{A,B,C,D}$ vérifie $\chi_{M_{A,B,C,D}}(\lambda) = \det(\lambda^2 I_n + \lambda U + V)$. Expliciter U et V en fonction des matrices A, B, C et D.

      ii. En déduire que $\det M_{A,B,C,D} = \det(AD - CB)$.

3. Dans cette partie, on suppose que $A = D = I_n$ et que C et B sont deux matrices à coefficients réels transposées l'une de l'autre. On désigne la matrice $M_{I_n,B,{}^tB,I_n}$ par S.

   (a) Justifier que ${}^tBB$ est une matrice symétrique positive et que ses valeurs propres sont toutes des nombres réels positifs ou nuls.

   (b) Exprimer le polynôme χ_S en fonction du polynôme $\chi_{{}^tBB}$.

   (c) Soit T une matrice symétrique dans $M_n(\mathbb{R})$. Démontrer que T est définie positive (i.e. tout vecteur non nul X de $\mathbb{R}^n$ vérifie ${}^tXTX > 0$) si et seulement si les valeurs propres de T sont toutes > 0.

   (d) En déduire que la matrice S est symétrique définie positive si et seulement si les valeurs propres de la matrice ${}^tBB$ sont toutes < 1.

4. On considère la suite de matrices $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par récurrence par :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & i \\ i & -2 \end{pmatrix} \text{ et pour } n > 1, A_n = \begin{pmatrix} 2A_{n-1} & iA_{n-1} \\ iA_{n-1} & -2A_{n-1} \end{pmatrix}.$$

   (a) Soit $n > 1$. Déterminer une relation de récurrence entre $\det A_n$ et $\det A_{n-1}$.

   (b) Soit $n \geqslant 1$. Exprimer $\det A_n$ en fonction de n.

   (c) Soit $n > 1$. Exprimer le polynôme caractéristique de la matrice A_n, χ_{A_n}, en fonction de $\chi_{A_{n-1}}$ et $\chi_{(-A_{n-1})}$.

   (d) Soit $n \geqslant 1$. Déterminer les valeurs propres de la matrice A_n.

Exercice III

Soit P le plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Soit $\mathcal{D}$ la droite $(O, \vec{i})$ et $\mathcal{D}'$ la droite de vecteur directeur $\vec{i}$ passant par le point $B = (0, 1)$. Soit $\mathcal{C}$ le cercle tangent à $\mathcal{D}$ en 0 et tangent à $\mathcal{D}'$ en B. Soit $t \in \mathbb{R}$. Soient M_t le point sur la droite $\mathcal{D}'$ d'abcisse t et N_t l'intersection de la droite OM_t et du cercle $\mathcal{C}$ autre que le point O.
   (a) Que peut-on dire du triangle ON_tB ?
   (b) Déterminer l'équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$ et l'équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}'$.
   (c) En déduire que le point N_t a pour coordonnées $(t/(1+t^2), 1/(1+t^2))$.
   (d) Quelles sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{N_tM_t}$?
2. Pour $t \in \mathbb{R}$ non nul, on note P_t le point tel que $\overrightarrow{OP_t} = \overrightarrow{N_tM_t}$; on pose $P_0 = O$.
   (a) Représenter la courbe Γ lieu des points P_t lorsque t parcourt $\mathbb{R}$. On précisera les éventuelles asymptotes.
   (b) Préciser la nature du point P_0 de Γ.
   (c) Calculer l'aire comprise entre la courbe Γ et la droite $\mathcal{D}'$.
3. Si z est un nombre complexe, on note $\bar{z}$ son conjugué. On considère l'application σ définie sur le plan P privé du point O par : l'image par σ du point M d'affixe z est le point M' d'affixe $1/\bar{z}$.
   (a) Soit M un point de P distinct de l'origine et soit $M' = \sigma(M)$. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OM'}$.
   (b) Soit $t \in \mathbb{R}$ non nul. Déterminer les coordonnées du point U_t, image par σ du point P_t défini dans la question 2.
   (c) Quelle est l'image par σ de la courbe Γ ?