

Corrigé

Questions de cours

- Soient N et N' deux normes sur E .
On dit que N et N' sont équivalentes ssi : $\exists(k_1, k_2) \in (\mathbb{R}^{+*})^2, \forall X \in E, k_1 N(X) \leq N'(X) \leq k_2 N(X)$.
- Soit $X \in E$. Alors : $\exists i_0 \in \{1, \dots, n\}, N_\infty(X) = |x_{i_0}|$.
Donc $(N_\infty(X))^p = |x_{i_0}|^p \leq \sum_{k=1}^n |x_k|^p$.
D'où : $N_\infty(X) \leq N_p(X)$.
D'autre part, par définition de $N_\infty(X)$, on a : $\forall k \in \{1, \dots, n\}, |x_k| \leq N_\infty(X)$ donc
 $\forall k \in \{1, \dots, n\}, |x_k|^p \leq (N_\infty(X))^p$ et $\sum_{k=1}^n |x_k|^p \leq n (N_\infty(X))^p$.
Comme toutes les quantités sont positives, on en déduit que : $N_p(X) \leq n^{1/p} N_\infty(X)$.
Donc les normes N_p et N_∞ sont équivalentes.
- Dans $\mathbb{R}^n$, toutes les normes sont équivalentes.
- On note : $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Soit $X \in E$; alors $X = \sum_{k=1}^n x_k e_k$.
Donc $u(X) = \sum_{k=1}^n x_k u(e_k)$ par linéarité.
D'où, grâce à l'inégalité triangulaire : $N_\infty(u(X)) \leq \sum_{k=1}^n |x_k| N_\infty(u(e_k)) \leq N_\infty(X) \times \sum_{k=1}^n N_\infty(u(e_k))$.
En posant $K = \sum_{k=1}^n N_\infty(u(e_k))$, on en déduit donc que : $\forall X \in E, N_\infty(u(X)) \leq K N_\infty(X)$.
- Un endomorphisme u d'un espace vectoriel normé E est continu ssi u est lipschitzien ssi
 $\exists k \in \mathbb{R}^+, \forall X \in E, N(u(X)) \leq k N(X)$ ssi u est continu au point 0_E .
- Comme toutes les normes sont équivalentes dans $\mathbb{R}^n$, en utilisant la question 4. et l'une des caractérisations de la continuité d'une application linéaire vues à la question 5., on en déduit que :
tout endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ est continu.

Partie 1.

- On calcule ${}^t A A$ et l'on obtient : ${}^t A A = I_3$. Donc A est orthogonale.
- On a, par la méthode de Sarrus : $\det(A) = \frac{1}{27}(4 + 4 + 4 - 1 + 8 + 8) = 1$.
Donc l'endomorphisme u est une rotation.
- On calcule le polynôme caractéristique de A ; on obtient :

$$\chi_A(x) = (x-1)\left(x - \frac{1}{3} - i\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\left(x - \frac{1}{3} + i\frac{2\sqrt{2}}{3}\right).$$

χ_A est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$; par théorème, A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

- 4.1 D'après les questions de cours, u étant linéaire et E de dimension finie,
 u est un endomorphisme continu de E .
De plus, comme u est une isométrie vectorielle, on a : $\forall X \in E, \|u(X)\| = \|X\|$. D'après la définition de la norme subordonnée qui nous est rappelée, on a donc : $\|u\| = 1$.
- 4.2 Soit $w \in \mathcal{L}_C(E)$. Par composition, l'application $X \mapsto \|w(X)\|$ est continue sur E donc sur la sphère-unité $S(0_E, 1) = \{X \in E, \|X\| = 1\}$. Or, comme E est de dimension finie et que $S(0_E, 1)$ est fermée (image réciproque du fermé $\{1\}$ par l'application continue $X \mapsto \|X\|$) et bornée, $S(0_E, 1)$ est un compact de E . Comme toute application continue sur un compact y est bornée et atteint ses bornes, il existe $X_0 \in S(0_E, 1)$ tel que $\|w\| = \|w(X_0)\|$.

5. On sait que la norme subordonnée est une norme d'algèbre de $\mathcal{L}_C(E)$.

Donc $\forall k \in \mathbb{N}, \| \| u^k \| \| \leq \| \| u \| \| ^k$, soit $\forall k \in \mathbb{N}, \| \| u^k \| \| \leq 1$.

Donc la suite (u^k) est une suite bornée de $\mathcal{L}_C(E)$.

6. Dans ce qui suit, on confond tout vecteur de E avec la matrice-colonne qui lui est canoniquement associée.

6.1 $\ker(v)$ est l'axe de la rotation u . On a :

$$X \in \ker(v) \iff AX = X \iff \begin{cases} \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z = x \\ -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z = y \\ \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z = z \end{cases} \iff \begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases}.$$

Donc $\ker(v) = \text{Vect}((1, 0, 1))$.

- 6.2 Soient $X \in \ker(v)$ et $Y \in \text{Im}(v)$.

Alors $AX = X$ et il existe $Z \in E$ tel que $Y = Z - u(Z) = Z - AZ$.

D'où : $\langle X, Y \rangle = {}^tXY = {}^tXZ - {}^tXAZ$.

Mais comme A est orthogonale, ${}^tA = A^{-1}$ donc

$AX = X \iff X = A^{-1}X \iff X = {}^tAX \iff {}^tX = {}^tXA$.

D'où : $\langle X, Y \rangle = {}^tXZ - {}^tXAZ = 0$. Comme ceci est vrai pour tout élément $X \in \ker(v)$ et $Y \in \text{Im}(v)$,

$\ker(v)$ et $\text{Im}(v)$ sont orthogonaux.

- 6.3 D'après la question précédente, on sait que $\ker(v) \cap \text{Im}(v) = \{0_E\}$. Par le théorème du rang : $\dim(\ker(v)) + \dim(\text{Im}(v)) = \dim(E)$, donc, par caractérisation : $E = \ker(v) \oplus \text{Im}(v)$.

- 6.4 Donc, pour tout $X \in E$, il existe un unique $X_1 \in \ker(v)$ et un unique $Y \in \text{Im}(v)$ tels que : $X = X_1 + Y$.

Mais $Y \in \text{Im}(v) \iff \exists Z \in E, Y = Z - u(Z)$; d'où

$\forall X \in E, \exists ! X_1 \in \ker(v), \exists Z \in E, X = X_1 + Z - u(Z)$.

- 6.5 Soient $X \in E$ et $m \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente : $X = X_1 + Z - u(Z)$ où $X_1 \in \ker(v)$ et $Z \in E$. Alors $v(X_1) = 0_E$, soit $u(X_1) = X_1$ et donc $\forall k \in \mathbb{N}, u^k(X_1) = X_1$. Donc :

$$p_m(X) = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} u^k(X) = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} u^k(X_1) + \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} u^k(Z) - \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} u^{k+1}(Z).$$

$$\text{Or, } \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} u^k(X_1) = X_1 \text{ et, par télescopage : } \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} u^k(Z) - \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} u^{k+1}(Z) = \frac{1}{m}(Z - u^m(Z)).$$

D'où : $p_m(X) = X_1 + \frac{1}{m}(Z - u^m(Z))$.

On a : $\| Z - u^m(Z) \| \leq (\| Z \| + \| u^m(Z) \|)$.

De la question 5., on déduit que : $\| Z - u^m(Z) \| \leq (\| Z \| + \| u^m \| \| Z \|) \leq 2 \| Z \|$ puisque $\| u^m \| \leq 1$ pour tout $m \in \mathbb{N}$.

La suite $(Z - u^m(Z))_{m \in \mathbb{N}}$ est donc bornée. D'où $\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{m}(Z - u^m(Z)) = 0_E$.

Donc la suite $(p_m(X))$ converge vers X_1 c'est-à-dire vers la projection de X sur $\ker(v)$ parallèlement à $\text{Im}(v)$.

Partie 2.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que $\| \| A \| \| = 0$.

Alors : $\forall X \in E, \| X \| = 1 \implies \| AX \| = 0 \implies AX = 0_E$. Mais, quitte à diviser X par sa norme, on en déduit, puisque $A0_E = 0_E$ que, pour tout $X \in E, AX = 0_E$. Donc $A = 0_n$.

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a : $\| \lambda A \| = \sup_{\| X \| = 1} \| \lambda AX \| = |\lambda| \sup_{\| X \| = 1} \| AX \| = |\lambda| \| A \|$.

Pour toutes matrices A et B , on a : pour tout $X \in E$,

$\| (A + B)X \| = \| AX + BX \| \leq \| AX \| + \| BX \| \leq \| A \| \| X \| + \| B \| \| X \|$.

D'où : $\| A + B \| \leq \| A \| + \| B \|$. Donc $\| \| \|$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. 2.1 B est produit de matrices à coefficients réels, donc est à coefficients réels.

De plus : ${}^tB = {}^t({}^tAA) = {}^tA{}^{tt}A = {}^tAA = B$. Donc B est symétrique.

D'autre part : $\forall X \in E, {}^tXBX = {}^tX{}^tAAX = {}^t(AX)AX = \langle AX, AX \rangle \geq 0$.

Donc $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

Par théorème, B est diagonalisable et ses valeurs propres sont positives ou nulles.

Si $A \in GL_n(\mathbb{R}), {}^tA \in GL_n(\mathbb{R})$ donc, par produit, $B \in GL_n(\mathbb{R})$. Donc 0 n'est pas valeur propre de B .

Si $A \in GL_n(\mathbb{R}), B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et ses valeurs propres sont strictement positives.

- 2.2** Si U est une matrice semblable à B , U et B ont le même polynôme caractéristique, donc les mêmes valeurs propres, donc $\boxed{\rho(U) = \rho(B)}$.
Notons que, puisque les valeurs propres de B sont positives ou nulles, $\rho(B) = \sup\{\lambda, \lambda \in \text{sp}(B)\} = \max\{\lambda, \lambda \in \text{sp}(B)\}$.
- 2.3** Par le théorème spectral, on sait que B est diagonalisable dans une base orthonormale $\mathcal{B}$.
Donc il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et une matrice $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ diagonale telles que :
 $B = PD^tP$ ($\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de B distinctes ou non).
Or, on a, pour $X \in E$: $\|AX\|^2 = \langle AX, AX \rangle = {}^tXBX = {}^tXPD^tPX$. On pose : $Y = {}^tPX$;
alors ${}^tY = {}^tXP$ et $\|AX\|^2 = {}^tYDY = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2$. Comme P est une matrice orthogonale, $\|Y\|^2 = {}^tYY = {}^tXPD^tPX = {}^tXX = \|X\|^2$. Si on prend $X \in E$ tel que $\|X\| = 1$, on a alors : $\|AX\|^2 \leq \rho(B) \sum_{i=1}^n y_i^2 = \rho(B)$.
On en déduit donc que : $\boxed{\|A\|^2 \leq \rho(B)}$.
- 2.4** Notons i_0 un entier entre 1 et n tel que $\rho(B) = \lambda_{i_0}$ et X_0 un vecteur propre de B , unitaire, associé à la valeur propre $\rho(B)$.
On a : $\|AX_0\|^2 = {}^tX_0BX_0 = \rho(B){}^tX_0X_0 = \rho(B)$. D'où : $\boxed{\|A\|^2 = \rho(B)}$.
- 3. 3.1** Si u est une homothétie de rapport $\gamma \neq 0$, pour tout $X \in E$, on a : $AX = \gamma X$ donc $\|AX\| = |\gamma| \|X\|$.
Donc $\boxed{\|A\| = |\gamma|}$.
- 3.2** Pour tout $k \in \mathbb{N}$, u^k est une homothétie de rapport γ^k donc $\|A^k\| = |\gamma|^k$ et
 $\boxed{(A^k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ est bornée ssi } |\gamma| \leq 1}$.
- 3.3** On a : $\forall k \in \mathbb{N}, A^k = \gamma^k I_n$ donc $P_m = \left(\frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \gamma^k \right) I_n$, soit $\boxed{P_m = \frac{1 - \gamma^m}{m(1 - \gamma)} I_n}$ car $\gamma \neq 1$. Comme
 $|\gamma| < 1$, il est clair que $\boxed{\lim_{m \rightarrow +\infty} P_m = O_n}$.
- 4. ERREUR d'ÉNONCÉ** : il faut supposer que u est un endomorphisme de E autoadjoint.
- 4.1** Par le théorème spectral, u est diagonalisable dans une base orthonormale et $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. D'après la question **2.**, $\|A\|^2 = \rho(B)$ où $B = {}^tAA = A^2$. Or, comme A est diagonalisable, les valeurs propres de A^2 sont : $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \dots, \lambda_n^2$. Donc $\rho(B) = \rho(A^2) = (\rho(A))^2$.
D'où : $\boxed{\|A\| = \rho(A)}$.
- 4.2** Pour tout $k \in \mathbb{N}$, les valeurs propres de A^k sont : $\lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots, \lambda_n^k$ et $A^k \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Donc, d'après ce que l'on a démontré à la question précédente, on a : $\|A^k\| = \rho(A^k)$. Mais $\rho(A^k) = \sup\{|\lambda^k|, \lambda \in \text{Sp}(A)\} = (\rho(A))^k$.
Donc $\|A^k\| = (\rho(A))^k$ et $\boxed{\text{la suite } (A^k) \text{ est bornée ssi } \rho(A) \leq 1}$.
- 4.3** On sait qu'il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que : $A = PD^tP$ où $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.
Alors : $\forall k \in \mathbb{N}, A^k = PD^k {}^tP$ avec $D^k = \text{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k)$.
D'où : $P_m = P \text{diag} \left(\frac{1 - \lambda_1^m}{m(1 - \lambda_1)}, \dots, \frac{1 - \lambda_n^m}{m(1 - \lambda_n)} \right) {}^tP$.
Comme, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $|\lambda_i| < 1$, alors $\boxed{\lim_{m \rightarrow +\infty} P_m = O}$.

Partie 3.

- 1.** On a, par définition de v : $X \in \ker(v) \iff u(X) = X$.
Donc $\boxed{\forall m \in \mathbb{N}^*, \forall X \in \ker(v), p_m(X) = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} X = X}$.
- 2.** p_m et v sont des polynômes en u donc commutent d'après le cours. Donc $\boxed{\forall m \in \mathbb{N}^*, p_m \circ v = v \circ p_m}$.
D'où : $p_m \circ v = v \circ p_m = p_m - u \circ p_m$. Or $u \circ p_m = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} u^{k+1} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m u^k$.
Par télescopage, on obtient : $\boxed{p_m \circ v = \frac{1}{m} (id_E - u^m)}$.
- 3. 3.1** On a : $X \in \text{Im}(v)$ donc il existe $Y \in E$ tel que $X = v(Y)$.
Alors $p_m(X) = (p_m \circ v)(Y) = \frac{1}{m} (Y - u^m(Y))$.

D'où : $\|p_m(X)\| \leq \frac{1}{m} (\|Y\| + \|u^m(Y)\|) \leq \frac{1}{m} (\|Y\| + \|Y\| \|u^m\|)$.

On obtient donc : $\|p_m(X)\| \leq \frac{\|Y\|}{m} (1 + \|u^m\|)$.

On se donne G un supplémentaire de $\ker(v)$ dans E ; on sait que v induit une bijection notée v_1 de G sur $\text{Im}(v)$. Dans le calcul précédent, on peut alors prendre $Y = v_1^{-1}(X)$. De plus, comme G est de dimension finie et que v_1 est linéaire, v_1 est continue. D'où : $\|Y\| \leq \|X\| \|v_1^{-1}\|$. En posant

$K = \|X\| \|v_1^{-1}\|$, on a bien : $\forall m \in \mathbb{N}^*, \|p_m(X)\| \leq \frac{K}{m} (1 + \|u^m\|)$.

3.2 Par hypothèse, la suite (u^m) est bornée. Donc $\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{K}{m} (1 + \|u^m\|) = 0$.

Par le théorème d'encadrement, on en déduit que : $\boxed{\text{la suite } (p_m(X))_{m \in \mathbb{N}^*} \text{ converge vers } 0_E}$.

4. Soit $X \in \ker(v) \cap \text{Im}(v)$; d'après la question 1. : $\forall m \in \mathbb{N}^*, p_m(X) = X$. Mais, par passage à la limite quand m tend vers l'infini, comme $X \in \text{Im}(v)$, d'après la question 3.2, $\lim_{m \rightarrow +\infty} p_m(X) = 0_E = X$. Donc

$\ker(v) \cap \text{Im}(v) = \{0_E\}$ et $\boxed{\text{la somme est directe}}$.

5. Mais, d'après le théorème du rang, on a : $\dim E = \dim(\ker(v)) + \dim(\text{Im}(v)) = \dim H$. Donc $\boxed{H = E}$.

6. On a, d'après ce qui précède, $E = \ker(v) \oplus \text{Im}(v)$ donc :

$\forall X \in E, \exists!(X_1, X_2) \in \ker(v) \times \text{Im}(v), X = X_1 + X_2$.

On a alors : $p_m(X) = X_1 + p_m(X_2)$. D'après la question 3.2, $\lim_{m \rightarrow +\infty} p_m(X_2) = 0_E$ donc

$\lim_{m \rightarrow +\infty} p_m(X) = X_1 = p(X)$. $\boxed{\text{La suite } (p_m)_{m \in \mathbb{N}^*} \text{ converge donc simplement sur } E \text{ vers } p}$.

Partie 4.

1. On a : $\|id_E\| = 1$ et, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$: $\|u^m\| \leq \|u\|^m \leq 1$.

$\boxed{\text{Donc la suite des itérés de } u \text{ est bornée}}$.

2. Comme u est continu, p_m est continu.

On a : $\forall m \in \mathbb{N}^*, \|p_m\| \leq \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \|u^k\| \leq \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} 1 = \frac{m}{m} = 1$. Donc : $\boxed{\forall m \in \mathbb{N}^*, \|p_m\| \leq 1}$.

3. **3.1** ERREUR d'ÉNONCÉ : il faut prouver que pour tout entier naturel m non nul, pour tout $T \in \text{Im}(v)$ on a : $\|p_m(X)\| \leq \|p_m\| \cdot \|X - T\| + \|p_m(T)\|$.

Par linéarité de p_m , pour tout $T \in \text{Im}(v)$, $p_m(X) = p_m(X - T) + p_m(T)$,

puis $\|p_m(X)\| \leq \|p_m(X - T)\| + \|p_m(T)\|$, d'où :

$\boxed{\|p_m(X)\| \leq \|p_m\| \|X - T\| + \|p_m(T)\|}$.

3.2 Des questions précédentes, on déduit que :

$\forall m \in \mathbb{N}^*, \forall T \in \text{Im}(v), \|p_m(X)\| \leq \|X - T\| + \|p_m(T)\|$.

Soit $\varepsilon > 0$; comme $X \in \overline{\text{Im } v}$, il existe $T \in \text{Im}(v)$ tel que $\|X - T\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. On choisit alors $Y \in E$ tel que $v(Y) = T$. Un calcul du même genre que celui fait à la question 3.1 de la partie 3 donne :

$$\|p_m(T)\| \leq \frac{\|Y\|}{m} (1 + \|u^m\|) \leq \frac{2\|Y\|}{m}.$$

Par le théorème d'encadrement, on obtient : $\lim_{m \rightarrow +\infty} \|p_m(T)\| = 0$. Donc, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que,

pour tout $m \geq N$, on ait : $\|p_m(T)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

D'où : $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall m \in \mathbb{N}, m \geq N \Rightarrow \|p_m(X)\| \leq \varepsilon$. Donc $\boxed{\text{la suite } (p_m(X)) \text{ converge vers } 0_E}$.

4. La démonstration est identique à celle faite à la question 4 de la partie 3.

Donc $\boxed{\text{la somme } H = \ker(v) + \overline{\text{Im } v} \text{ est directe}}$.

5. Soit $m \in \mathbb{N}^*$.

5.1 v et p_m commutent donc, par théorème : $\boxed{\forall m \in \mathbb{N}^*, \text{Im}(v) \text{ est stable par } p_m}$.

5.2 Soit $X \in \overline{\text{Im } v}$; il existe alors une suite $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de vecteurs de $\text{Im}(v)$ qui converge vers X . Par continuité de p_m , la suite $(p_m(X_k))_{k \in \mathbb{N}}$ est convergente de limite $p_m(X)$. D'après la question précédente, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $p_m(X_k) \in \text{Im}(v)$, donc $p_m(X) \in \overline{\text{Im } v}$. Donc $\boxed{\overline{\text{Im } v} \text{ est stable par } p_m}$.

5.3 Comme v et p_m commutent, $\ker(v)$ est stable par p_m . H est la somme de sous-espaces vectoriels stables par p_m , donc $\boxed{H \text{ est stable par } p_m}$.

- 5.1** La démonstration est identique à celle faite à la question **6** de la partie 3, en remplaçant p_m par π_m et p par π . Donc $\boxed{\text{la suite } (p_m)_{m \in \mathbb{N}} \text{ converge simplement sur } H \text{ vers } \pi}$.
- 5.2** On a, par continuité de $p_m : \forall X \in H, \|p_m(X)\| \leq \|p_m\| \|X\| \leq \|X\|$ d'après la question **2**. En passant à la limite quand m tend vers $+\infty$, on obtient : $\boxed{\forall X \in H, \|\pi(X)\| \leq \|X\|}$.
- 5.3** Comme π est linéaire, d'après les caractérisations des applications linéaires continues rappelées dans les questions de cours, $\boxed{\pi \in \mathcal{L}_C(H)}$ (nouvelle coquille : π n'est définie que sur H).

Partie 5.

- Si $X \in E$, $Y = u(X)$ est une sous-suite de X donc reste bornée. Donc $Y \in E$. La linéarité est évidente. Donc $\boxed{u \text{ est bien un endomorphisme de } E}$.
- Soient $X \in E$ et $Y = u(X)$. On a : $\|Y\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_{n+1}| = \sup_{n \in \mathbb{N}^*} |x_n| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| = \|X\|$.
D'où : $\forall X \in E, \|u(X)\| \leq \|X\|$. Donc u est continu et $\|u\| \leq 1$. Mais, si l'on considère la suite constante X égale à 1, on a : $u(X) = X$. Donc $\boxed{\|u\| = 1}$.
- On a : $X \in \ker(v)$ ssi $\forall n \in \mathbb{N}, x_n = x_{n+1}$ ssi X est constante.
Donc $\boxed{\ker(v) \text{ est l'ensemble des suites constantes}}$.
- Soit $X \in \text{Im}(v)$; il existe $Y \in E$ tel que $X = v(Y)$ c'est-à-dire : $\forall n \in \mathbb{N}, x_n = y_n - y_{n+1}$.
On a alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*, s_n = \sum_{k=0}^{n-1} x_k = \sum_{k=0}^{n-1} (y_k - y_{k+1}) = y_0 - y_n$.
D'où : $\forall n \in \mathbb{N}^*, |s_n| \leq |y_0| + |y_n| \leq 2\|Y\|$ car Y est bornée. Donc S est bornée.
Réciproquement, soit $X = (x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telle que la suite S définie par le texte soit bornée.
Alors il existe $M > 0$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, |s_n| \leq M$.
D'où : $\forall n \in \mathbb{N}, |x_n| = |s_{n+1} - s_n| \leq |s_{n+1}| + |s_n| \leq 2M$. Donc X est bornée.
En posant : $\forall n \in \mathbb{N}, y_n = -s_n$, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, y_n - y_{n+1} = -s_n + s_{n+1} = x_n$. Donc $v(Y) = X$ et $X \in \text{Im}(v)$.
D'où l'équivalence : $\boxed{X \in \text{Im}(v) \text{ ssi } S \text{ définie par } s_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, s_n = \sum_{k=0}^{n-1} x_k \text{ est bornée}}$.
- On construit la suite $X = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la façon suivante : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in [m(m+1), (m+1)^2 - 1], x_k = 1$ et $\forall k \in [(m+1)^2, (m+1)(m+2) - 1], x_k = 0$. Donc $X = (1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, \dots)$. Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on pose : $p_m(X) = (y_n^{(m)})_{n \in \mathbb{N}^*}$. La suite $(p_m(X))_{m \in \mathbb{N}^*}$ est divergente car elle ne vérifie pas le critère de Cauchy. En effet, on a : $\forall m \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}, y_n^{(m)} = \frac{1}{m} \sum_{k=n}^{n+m-1} x_k$.
Par construction de la suite X , on a : $\forall m \in \mathbb{N}^*, y_{m(m-1)}^{(m)} = 1$ et $y_{m(m-1)}^{(2m)} = \frac{1}{2}$.
D'où : $\forall m \in \mathbb{N}^*, \|p_m(X) - p_{2m}(X)\| \geq |y_{m(m-1)}^{(m)} - y_{m(m-1)}^{(2m)}| = \frac{1}{2}$.
 $\boxed{\text{Il existe donc une suite } X \in E \text{ telle que la suite } (p_m(X))_{m \in \mathbb{N}^*} \text{ diverge}}$.

FIN DE L'ÉPREUVE.