E3A 2009 - MP - Maths A

Partie I

1. C'est la formule pour la somme des termes d'une suite géométrique de raison $-x \neq -1$.

2. Il suffit d'intégrer l'égalité précédente sur le segment borné par 0 et x, sur lequel toutes les fonctions concernées sont continues.

3. D'après l'égalité du **2.**, il suffit de montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^x \frac{(-1)^n t^n}{1+t}\,dt$ a pour limite 0 quand n tend vers $+\infty$.

On peut utiliser le théorème de convergence dominée (c'est clairement ce qu'attend l'énoncé) : pour tout n, soit $f_n : t \longmapsto \dfrac{(-1)^n t^n}{1+t}$. Les fonctions f_n sont continues par morceaux et intégrables sur $]0,x[$ (ou $]x,0[$ si $x<0$), la suite (f_n) converge simplement sur cet intervalle vers la fonction nulle (elle-même continue par morceaux), et est dominée par la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{1+t}$, elle aussi intégrable. Cela suffit pour garantir que l'intégrale a pour limite 0.

4. La relation (1) s'en déduit en prenant $x=1$; la (2) en prenant $x=-1/2$.

5.i C'est le théorème sur les séries alternées.

5.ii a) On a, pour tout $p \geq 1$, $S_{p+2}-S_p = (-1)^{p+1}(u_{p+2}-u_{p+1})$, du signe de $(-1)^p$ puisque la suite (u_n) décroît. En prenant $p=2n$ (respectivement $2n-1$), on en déduit la croissance de la suite (S_{2n}) (respectivement la décroissance de (S_{2n-1})).

b) La suite (S_{2n}) croît, donc est majorée par sa limite S ; de même pour l'autre inégalité.

5.iii On en déduit, pour tout $p \geq 1$: $0 \leq S-S_{2p} \leq S_{2p-1}-S_{2p} = u_{2p}$ et $0 \leq S_{2p-1}-S \leq S_{2p-1}-S_{2p} = u_{2p} \leq u_{2p-1}$ ce qui fournit le résultat demandé pour tout $n \geq 1$, pair ou impair.

6. On applique les résultats du **5.** avec $u_n = 1/n$. On a alors, avec les notations du **5.** et grâce à la relation (1), $|\ln(2)-S_n| \leq \dfrac{1}{n}$ pour tout $n \geq 1$. On peut donc prendre $N_p = 10^p$.

7.i On a pour tout $n \geq 1$: $0 \leq R_n \leq \displaystyle\sum_{i=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n+1}} \frac{1}{1-1/2} = \frac{1}{2^n}$ (en posant $k = i-(n+1)$).

7.ii Puisque $R_n = \ln(2) - \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i2^i}$ et que $R_n \leq \dfrac{1}{2^n}$, il suffit d'avoir $\dfrac{1}{2^{N'_p}} \leq 10^{-p}$ soit $N'_p \geq \dfrac{\ln 10}{\ln 2}\,p$. Si on tient vraiment à un entier, on peut donc prendre $N'_p = 1 + E\Big(\dfrac{\ln 10}{\ln 2}\,p\Big)$ où E désigne la partie entière.

7.iii N_p dépend exponentiellement de p, alors que N'_p est majoré par $2 + \dfrac{\ln 10}{\ln 2}\,p$, fonction affine ; les croissances comparées montrent que N_p tend beaucoup plus vite que N'_p vers $+\infty$.

Partie II

1. Le polynôme $Q = P(-1) - P(X)$ s'annule en -1, donc est divisible par $X+1$; il existe donc bien un unique polynôme $R = \varphi_n(P)$ tel que $Q = (X+1)R$, qui est le quotient dans la division euclidienne de Q par $X+1$. De plus, on a $\deg Q = \deg(X+1) + \deg R = 1 + \deg R$ et $\deg Q \leq \deg P \leq n$, donc $R = \varphi_n(P) \in \mathbf{R}_{n-1}[X]$.

2. Soient P et Q dans $\mathbf{R}_n[X]$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbf{R}^2$. Alors

$$\begin{aligned}
[\lambda P + \mu Q](-1) - [\lambda P + \mu Q](X) &= \lambda\big(P(-1)-P(X)\big) + \mu\big(Q(-1)-Q(X)\big) \\
&= \lambda(X+1)\varphi_n(P) + \mu(X+1)\varphi_n(Q) \\
&= (X+1)\big(\lambda\varphi_n(P) + \mu\varphi_n(Q)\big)
\end{aligned}$$

La définition de φ_n montre alors que $\varphi_n(\lambda P + \mu Q) = \lambda\varphi_n(P) + \mu\varphi_n(Q)$ donc que φ_n est linéaire.

D'autre part, on a clairement $\varphi_n(P) = 0 \iff P(X) = P(-1)$, donc si et seulement si P est un polynôme constant. Le noyau de φ_n est donc l'espace des polynômes constants.

Cet espace est de dimension 1 ; la formule du rang montre alors que l'image de φ_n est de dimension $(\dim \mathbf{R}_n[X]) - 1 = n = \dim \mathbf{R}_{n-1}[X]$. Cette image est donc $\mathbf{R}_{n-1}[X]$ tout entier, et donc φ_n est surjective.

3. On connaît l'identité $a^p - b^p = (a-b)\sum_{k=0}^{p-1} a^{p-1-k}b^k$ valable, pour tout $p \geq 1$, dans n'importe quel anneau commutatif.

Appliquée à $a = -1$ et $b = X$, elle fournit pour $P = X^p$: $P(-1)-P(X) = -(1+X)\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^{p-1-k}X^k$ soit $\varphi_n(X^p) = \sum_{k=0}^{p-1}(-1)^{p-k}X^k$ pour tout p tel que $1 \leq p \leq n$. Puisque $\varphi_n(1) = 0$, la matrice cherchée est donc

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & \cdots & \cdots & (-1)^n \\ \vdots & 0 & -1 & 1 & & (-1)^{n-1} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Plus précisément, $M = (m_{ij})$ est une matrice à n lignes et $n+1$ colonnes, dans laquelle m_{ij} est le coefficient de X^{i-1} dans $\varphi_n(X^{j-1})$; donc $m_{ij} = 0$ si $i \geq j$, et vaut $(-1)^{j-i}$ sinon.

4. On utilise la matrice : pour tout (i,j), a_i est la $(i+1)$-ème coordonnée de P dans la base canonique, et b_j la $(j+1)$-ème coordonnée de $\varphi_n(P)$. On a donc pour tout j :

$$b_j = \sum_{i=0}^{n} m_{j+1,i+1}a_i = \sum_{i=j+1}^{n} (-1)^{i-j}a_i$$

qui donne bien le résultat demandé puisque $(-1)^{-j} = (-1)^j$.

Partie III

1. La fonction g est continue par morceaux sur I, et $|g(x)| \leq f(x)$ pour tout $x \in I$. Puisque f est intégrable sur I, g l'est donc aussi.

2. Même démonstration.

3. Puisque f est positive sur I, on a, pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $x \in I$: $0 \leq x^{n+1}f(x) \leq x^n f(x)$. En intégrant cette inégalité sur I (légitime d'après **2.**), on en déduit $u_{n+1}(f) \leq u_n(f)$ pour tout n.

D'autre part, la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $]0,1[$, et est dominée par f, intégrable sur I donc sur $]0,1[$; le théorème de convergence dominée permet donc d'affirmer que la suite $\big(u_n(f)\big)$ (considérée comme une suite d'intégrales sur $]0,1[$) a pour limite 0.

Le théorème sur les séries alternées prouve alors que la série $\sum(-1)^n u_n(f)$ converge.

4. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, notons S_n la somme partielle $\sum_{k=0}^{n} u_k(f)$. La question **I.1.** fournit alors

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad S_n + (-1)^{n+1}\int_I \frac{x^{n+1}f(x)}{1+x}\,dx = S_f$$

Une fois de plus, le théorème de convergence dominée, avec g comme fonction dominante, montre que l'intégrale figurant dans cette égalité a pour limite 0, ce qui fournit l'égalité $\mathcal{E}_f$ par passage à la limite.

5.(i) La fonction f est bien intégrable sur I, les résultats précédents s'appliquent. Ici $u_n(f) = 1/(n+1)$ pour tout n, l'égalité $\mathcal{E}_f$ donne donc $\ln 2 = \displaystyle\int_I \frac{dx}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$. On retrouve donc l'égalité (1) du **I.4.**.

5.(ii) La fonction f est ici aussi intégrable sur I. On a, pour tout $n \in \mathbf{N}$: $u_n(f) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_I x^{n-1/2}\,dx = \dfrac{1}{2n-1}$.

D'autre part, le changement de variable $t = \sqrt{x}$, légitime puisque la fonction racine carrée est un C^1-difféomorphisme de I dans lui-même, donne $S_f = \displaystyle\int_I \frac{du}{1+u^2} = \frac{\pi}{4}$. L'égalité $\mathcal{E}_f$ devient donc

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1} = \frac{\pi}{4}$$

5.(iii) Encore une fois, f est bien intégrable sur I ; et, pour tout n, $\quad u_n(f) = \dfrac{1}{3n-2}$.

Le changement de variable $u = x^{1/3}$ fournit bien $S_f = \displaystyle\int_I \frac{dx}{1+x^3}$. Puisque $1+X^3 = (1+X)(1-X+X^2)$, le coefficient de $1/(1+X)$ dans la décomposition en éléments simples de $1/(1+X^3)$ vaut $[1/(1-X+X^2)](-1) = 1/3$. On a alors

$$\frac{1}{1+X^3} - \frac{1}{3(1+X)} = -\frac{X^2-X-2}{3(X^3+1)} = -\frac{X-2}{3(X^2-X+1)} = -\frac{X-1/2}{3(X^2-X+1)} + \frac{1}{2(X^-X+1)}$$

qui est la décomposition proposée par l'énoncé avec $a = 1/3$, $b = -1/6$ et $c = 1/2$.

On a alors $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx = [\ln(x^2-x+1)]_0^1 = 0$ et enfin, en utilisant $\displaystyle\int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{Arctan}\frac{t}{a}$: $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2-x+1} = \int_0^1 \frac{dx}{(x-1/2)^2+3/4} = \left[\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right]_0^1 = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$. On en déduit $\quad S_f = a\ln 2 + c\,\dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}} = \dfrac{\ln 2}{3} + \dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

L'égalité $\mathcal{E}_f$ donne donc ici $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n-2} = \frac{\ln 2}{3} + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

Partie IV

1. Découle immédiatement de $\quad \dfrac{P(-1)-P(x)}{1+x} = \varphi_n(P)(x) \quad$ pour tout $x \neq -1$.

2. On applique la question précédente à T_n, et on divise par $T_n(-1) \neq 0$; on obtient avec les notations de l'énoncé :

$$\begin{aligned}\left|S_f - \frac{S_n}{T_n(-1)}\right| &= \frac{1}{|T_n(-1)|}\left|\int_0^1 \frac{T_n(x)}{1+x}\,f(x)\,dx\right| \leq \frac{1}{|T_n(-1)|}\int_0^1 \frac{|T_n(x)|}{1+x}\,f(x)\,dx \quad (f \geq 0)\\ &\leq \frac{M_n}{|T_n(-1)|}\int_0^1 \frac{f(x)}{1+x}\,dx = \frac{M_n S_f}{|T_n(-1)|}\end{aligned}$$

Partie V

1.(i) En utilisant la relation de récurrence vérifiée par (T_n), on obtient $\quad v_{n+2} = 6v_{n+1} - v_n \quad$ pour tout n.

1.(ii) La suite (v_n) vérifie donc une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients constants ; son polynôme caractéristique $X^2 - 6X + 1$ ayant deux racines simples $3 + \sqrt{8}$ et $3 - \sqrt{8}$, on obtient bien le résultat de l'énoncé.

1.(iii) En écrivant l'égalité précédente aux rangs 0 et 1, on obtient $\alpha = \beta = 1/2$.

2 La relation $\quad \deg T_n = n \quad$ est vraie aux rangs 0 et 1. Si elle est vraie jusqu'à un rang $n+1 \geq 1$, alors $\deg\bigl(2(1-2X)T_{n+1}\bigr) = n+2 > \deg T_n \quad$ donc la relation de récurrence montre que $\quad \deg T_{n+2} = n+2$. On a donc bien $\deg T_n = n$ pour tout n.

D'autre part, puisque $3 - \sqrt{8} > 0$, Les résultats de **1.(i)** et **1.(ii)** montrent que $v_n > 0$ pour tout n : on a donc bien $T_n(-1) \neq 0$ pour tout n.

3. C'est vrai aux rangs 0 et 1 ; et, si c'est vrai jusqu'au rang $n+1 \geq 1$, la relation de récurrence montre que T_{n+2} est une différence de produits de polynômes à coefficients entiers, donc est lui-même un polynôme à coefficients entiers, ce qui achève la démonstration.

4. Soit $x \in \mathbf{R}$. On a $\quad T_0(\sin^2 x) = 1 = \cos(2.0.x) \quad$ et $\quad T_1(\sin^2 x) = 1 - 2\sin^2 x = \cos(2x)$. Si l'on suppose l'égalité vraie jusqu'au rang $n+1 \geq 1$, alors $\quad T_{n+2}(\sin^2 x) = 2\cos(2x)\cos(2(n+1)x) - \cos(2nx) = \cos(2(n+2)x) \quad$ en utilisant $2\cos a\cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b)$, ce qui achève la démonstration.

5. Soit $x \in [0,1]$; alors $\sqrt{x} \in [0,1]$, on peut donc choisir $t \in [0, \pi/2]$ tel que $\sqrt{x} = \sin t$. On a alors $|T_n(x)| = |T_n(\sin^2 t)| = |\cos(2nt)| \leq 1$. De plus, pour $x = 0$, on a $t = 0$ donc $|T_n(x)| = 1$. On a donc bien $M_n = 1$.

D'autre part, puisque $3-\sqrt{8}>0$, on a $T_n(-1)=v_n>(3+\sqrt{8})^n/2$ pour tout n, ce qui fournit immédiatement l'inégalité demandée.

6. Prenons pour f la fonction constante égale à 1. Comme vu en **III.5.**, on a $S_f=\ln 2$.

D'autre part, on a vu en **3.** que les polynômes T_n sont à coefficients entiers. La question **II.4.** montre alors que les polynômes $\varphi_n(T_n)$ sont eux aussi à coefficients entiers. Par suite, les nombres $S_n=\int_0^1 \varphi_n(T_n)(x)\,dx$ sont rationnels.

Puisque $v_0=1$ et $v_1=3$, une récurrence immédiate prouve que les nombres $v_n=T_n(-1)$ sont tous entiers. En posant $t_n=\dfrac{S_n}{T_n(-1)}$ pour tout n, les t_n sont donc tous rationnels.

Enfin, l'inégalité du **5.**, jointe au résultat du **IV.2.**, montre que $|\ln 2-t_n|\leq \dfrac{K}{(3+\sqrt{8})^n}$ avec $K=2S_f=2\ln 2$.

Partie VI

1. La fonction g est construite à l'aide des opérations usuelles à partir de fonctions de classe C^5 ; son dénominateur ne s'annulant pas, elle est de classe C^5 sur $[0,1]$.

2. Il suffit d'effectuer le changement de variable $x=\sin^2 t$ dans l'intégrale.

3. D'après la question précédente et **V.4.**, on a $4n^2\displaystyle\int_0^1 \frac{T_n(x)}{1+x}f(x)\,dx=4n^2\int_0^{\pi/2}\cos(2nx)g(x)\,dx$ pour tout $n\geq 1$. Il suffit alors d'effectuer deux intégrations par parties successives sur cette dernière intégrale, en dérivant à chaque fois le facteur en g, pour obtenir la relation de l'énoncé.

4.(i) Il suffit d'écrire la relation du **3.** aux rangs $n+2$ et n, puis de soustraire ces deux égalités.

4.(ii) Le calcul fait en 3., appliqué à g'' au lieu de g, donne

$$4n^2\int_0^{\pi/2}\cos(2nx)g''(x)\,dx=(-1)^n g^{(3)}\left(\frac{\pi}{2}\right)-g^{(3)}(0)-\int_0^{\pi/2}\cos(2nx)g^{(4)}(x)\,dx$$

soit $4n^2\displaystyle\int_0^{\pi/2}\cos(2nx)g''(x)\,dx=(-1)^n g^{(3)}\left(\frac{\pi}{2}\right)-g^{(3)}(0)+\int_0^{\pi/2}\frac{\sin(2nx)}{2n}g^{(5)}(x)\,dx$ après une nouvelle intégration par parties.

Posons $C_n=(-1)^n g^{(3)}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)-g^{(3)}(0)$. On a $C_{n+2}=C_n$ donc, en écrivant la relation précédente au rang $n+2$ et en utilisant **(i)**, on obtient après calculs $U=\dfrac{C_n}{16}\left(\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{(n+2)^2}\right)-\dfrac{V}{16}$.

4.(iii) Tout d'abord, $|C_n|$ peut être majoré par la constante $|g^{(3)}(\pi/2)|+|g^{(3)}(0)|$ et, pour tout $n\geq 1$, $0\leq \dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{(n+2)^2}=\dfrac{4(n+1)}{n^2(n+2)^2}\leq\dfrac{4}{n^2(n+2)}\leq\dfrac{4}{n^3}$. Dans la relation précédente, le premier terme peut donc être majoré en module par un K_1/n^3.

D'autre part, $|V|\leq\displaystyle\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1}{n^3}+\frac{1}{(n+2)^3}\right)|g^{(5)}(x)|\,dx\leq\int_0^{\pi/2}\frac{2}{n^3}|g^{(5)}(x)|\,dx$. La fonction $g^{(5)}$ est continue donc bornée sur le segment $[0,1]$; si M majore $|g^{(5)}|$ sur $[0,1]$, on obtient donc $|V|\leq\dfrac{\pi M}{n^3}$.

On a donc $|U|\leq\dfrac{K_1}{n^3}+\dfrac{|V|}{16}\leq\dfrac{K}{n^3}$ avec $K=K_1+\pi M/16$.

5. On prend de nouveau pour f la fonction constante égale à 1, qui donne $S_f=\ln 2$.

Soit $n\geq 1$. On applique le **IV.1.** à Q_n (au rang $n+2=\deg Q_n$). Par linéarité de φ_{n+2} et de l'intégration, on obtient

$$\begin{aligned}U&=Q(-1)\ln 2-(n+2)^2\int_0^1\varphi_{n+2}(T_{n+2})(x)\,dx+n^2\int_0^1\varphi_n(T_n)(x)\,dx\\&=Q(-1)\ln 2-(n+2)^2S_{n+2}+n^2S_n\end{aligned}$$

avec les notations du **IV**. En admettant provisoirement que $Q_n(-1) \neq 0$, on a donc

$$\ln 2 - \frac{(n+2)^2 S_{n+2} - n^2 S_n}{Q_n(-1)} = \frac{U}{Q_n(-1)}$$

Etudions donc les nombres $\quad Q_n(-1) = (n+2)^2 v_{n+2} - n^2 v_n \quad$ avec les notations du **V.1.**. Notons déjà que la suite (v_n) est croissante : en effet $v_0 \leq v_1$ et, si $v_n \leq v_{n+1}$, alors $v_{n+2} = 6v_{n+1} - v_n \geq 5v_{n+1} \geq v_{n+1}$ puisque les v_n sont strictement positifs.

On en déduit $\quad Q_n(-1) = 6(n+2)^2 v_{n+1} - (n+2)^2 v_n - n^2 v_n \geq \big(5(n+2)^2 - n^2\big) v_n \geq 4n^2 v_n \geq 2n^2(3+\sqrt{8})^n$. Cela montre en particulier qu'on a bien $Q_n(-1) \neq 0$, et donc

$$\left|\ln 2 - \frac{(n+2)^2 S_{n+2} - n^2 S_n}{Q_n(-1)}\right| = \frac{|U|}{|Q_n(-1)|} \leq \frac{K}{2n^5(3+\sqrt{8})^n}$$

Enfin on a déjà vu que les nombres S_n sont rationnels, et les nombres $Q_n(-1)$ sont entiers puisque les v_n le sont ; donc les nombres $q_n = \dfrac{(n+2)^2 S_{n+2} - n^2 S_n}{Q_n(-1)}$ sont bien rationnels.