$\boxed{\textbf{E3A Epreuve de Mathématique B MP}}$

Exercice I

1.

(a) Posons $h : t \longmapsto \dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}\sin(tu)$ et $I = [0,1[$. h est continue sur I par TG (théorèmes généraux).

En 1 : $h(t) = O(\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}) = O(\dfrac{1}{\sqrt{1-t}})$ et comme $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t}}$ est intégrable sur I (intégrale de référence), on conclut par TC (théorème de comparaison) que h est intégrable sur I.

Conclusion : $\boxed{g \text{ est définie sur } \mathbb{R}}$

(b) Pour tout $a \in]0,1[$, $\displaystyle\int_a^1 \frac{t}{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\sqrt{1-t^2}\right]_a^1 = \sqrt{1-a^2}$. Résolvons $\sqrt{1-a^2} = \dfrac{1}{\sqrt{u}}$: $1-a^2 = \dfrac{1}{u}$ d'où $a = \sqrt{1-\dfrac{1}{u}}$ convient car il appartient à $]0,1[$ $(u>1)$.

Conclusion : $\boxed{\alpha_u = \sqrt{1-\dfrac{1}{u}}}$

(c) $\forall t \in [0,1[$, $\left(\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}\right)' = \dfrac{1}{(1-t^2)^{3/2}}$ d'où

$$\int_0^{\alpha_u} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\sin(tu)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\left(\frac{-\cos(tu)}{u}\right)\right]_0^{\alpha_u} - \int_0^{\alpha_u}\frac{1}{(1-t^2)^{3/2}}\left(-\frac{\cos(tu)}{u}\right)\mathrm{d}t$$
$$= \frac{\alpha_u}{\sqrt{1-\alpha_u^2}}\left(\frac{-\cos(\alpha_u u)}{u}\right) + \int_0^{\alpha_u}\frac{1}{(1-t^2)^{3/2}}\left(\frac{\cos(tu)}{u}\right)\mathrm{d}t$$

On en déduit que pour tout $u > 1$,

$$|g(u)| \leqslant \left|\int_0^{\alpha_u}\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\sin(tu)\,\mathrm{d}t\right| + \left|\int_{\alpha_u}^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\sin(tu)\,\mathrm{d}t\right| \qquad \text{donc,}$$
$$|g(u)| \leqslant \left|\int_0^{\alpha_u}\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\sin(tu)\,\mathrm{d}t\right| + \int_{\alpha_u}^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t \qquad \text{donc,}$$
$$|g(u)| \leqslant \left|\frac{\alpha_u}{\sqrt{1-\alpha_u^2}}\left(\frac{-\cos(\alpha_u u)}{u}\right)\right| + \left|\int_0^{\alpha_u}\frac{1}{(1-t^2)^{3/2}}\left(\frac{\cos(tu)}{u}\right)\mathrm{d}t\right| + \frac{1}{\sqrt{u}}$$

Or $\alpha_u = \sqrt{1-\dfrac{1}{u}}$ donc

$$|g(u)| \leqslant \left|\frac{\alpha_u}{\sqrt{\frac{1}{u}}}\left(\frac{1}{u}\right)\right| + \left|\int_0^{\alpha_u}\frac{1}{(1-t^2)^{3/2}}\left(\frac{1}{u}\right)\mathrm{d}t\right| + \frac{1}{\sqrt{u}} \qquad \text{d'où}$$
$$|g(u)| \leqslant \frac{\alpha_u}{\sqrt{\frac{1}{u}}}\left(\frac{1}{u}\right) + \frac{\alpha_u}{\sqrt{\frac{1}{u}}}\left(\frac{1}{u}\right)\mathrm{d}t + \frac{1}{\sqrt{u}}$$

Et comme $\alpha_u < 1$, on a finalement $|g(u)| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{u}} + \dfrac{1}{\sqrt{u}} + \dfrac{1}{\sqrt{u}} = \dfrac{3}{\sqrt{u}}$

Conclusion : $\boxed{\forall u > 1,\ |g(u)| \leqslant \dfrac{3}{\sqrt{u}}}$

2.

(a) Le cercle de centre O et de rayon π a pour équation $x^2 + y^2 = \pi^2$. comme y est positif, on en déduit que $y = \sqrt{\pi^2 - x^2}$

Conclusion : $\boxed{\forall x \in]-\pi,\pi],\ f(x) = \sqrt{\pi^2 - x^2}}$

(b) Voir le cours ! Ici ce théorème ne s'applique pas car la fonction n'est pas de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$ à cause de $\lim_{x \to \pi^-} f'(x) = +\infty$

3.

(a) La fonction étant paire on a pour tout $n \geqslant 1$, $\boxed{b_n = 0}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t) \cos(nt) \, \mathrm{d}t}$

(b) Effectuons une intégration par partie sur a_n :

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \underbrace{f(t}_{u} \underbrace{\cos(nt)}_{v'} \, \mathrm{d}t = \frac{2}{\pi} \left[f(t) \frac{\sin(nt)}{n} \right]_0^\pi - \frac{2}{\pi} \int_0^\pi - \frac{t}{\sqrt{\pi^2 - t^2}} \frac{\sin(nt)}{n} \, \mathrm{d}t = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{t}{\sqrt{\pi^2 - t^2}} \frac{\sin(nt)}{n} \, \mathrm{d}t$$

Effectuons ensuite un changement de variables $t = \pi x$:

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{\pi x}{\sqrt{\pi^2 - (\pi x)^2}} \frac{\sin(n \pi x)}{n} \pi \, \mathrm{d}x = \frac{2}{n} \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1 - (x)^2}} \sin(n \pi x) \, \mathrm{d}x$$

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \, a_n = \frac{2}{n} g(\pi n)}$

4.

(a) Posons u_n définie par $u_n(x) = a_n \cos nx$. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout entier $n \geqslant 1$, $|u_n(x)| \leqslant \frac{2}{n} \frac{3}{\sqrt{\pi n}} = v_n$ d'après le 1. (c), et comme $v_n = O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ par TC, $(\sum v_n)$ converge et donc la série $(\sum u_n)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

Conclusion : $\boxed{\text{La série de Fourier de } f \text{ converge normalement sur } \mathbb{R}}$

Ce résultat ne contredit pas le 2. (b) car le théorème de Dirichlet n'est qu'une condition suffisante pour que la série converge normalement sur $\mathbb{R}$. De plus cette converge normale ne donne pas vers quoi elle converge.

(b) Soit $S_n(f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{p=1}^{n} u_p$

D'une part f est continue sur $\mathbb{R}$: en effet f est 2π-périodique, continue sur $]-\pi, \pi[$ par TG et $f(\pi^+) = f(\pi^-) = 0$ d'où f est continue sur $\mathbb{R}$. On a donc d'après le théorème de Parseval, la convergence en moyenne quadratique de $(S_n(f))$ vers f, soit $\lim_{n \to +\infty} \|S_n(f) - f\|_2 = 0$.

D'autre part on a d'après le 4. (a), la série $(\sum u_n)$ qui converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction F, donc la suite $(S_n(f))$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers F. La fonction F est 2π-périodique (transfert par convergence simple) et F est continue sur $\mathbb{R}$ (transfert par convergence uniforme de la continuité). On peut donc considérer dans l'espace $C_{2\pi}$: $\|S_n(f) - F\|_2 \leqslant \|S_n(f) - F\|_\infty \longrightarrow 0$ lorsque n tend vers l'infini. On en déduit donc que la suite $(S_n(f))$ converge en moyenne quadratique vers F. Par unicité de la limite (quadratique), onc a $F = f$.

Conclusion : $\boxed{(S_n(f)) \text{ converge normalement sur } \mathbb{R} \text{ vers } f}$

Exercice II

1.

(a) Tout d'abord le théorème de Schwarz permet avec des fonctions de classe C^2 de confondre $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)$ avec $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$.

S'il existe a de classe C^1 telle que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = a(x) f(x, y)$ alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = a(x) \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \text{ d'où } f(x, y) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = f(x, y) \; a(x) \; \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \; \frac{\partial f}{\partial y}(x, y).$$

On en déduit que f vérifie $(\mathcal{E})$.

Réciproquement, si f vérifie $(\mathcal{E})$ et qu'elle ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, considérons g définie sur $\mathbb{R}^2$ par $g(x,y) = \dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)}{f(x,y)}$. On a g de classe C^1 par TG et $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \dfrac{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)f(x,y) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)}{f(x,y)^2} = 0$, car f vérifie $(\mathcal{E})$. Comme $\mathbb{R}^2$ est un ouvert convexe, il existe une fonction a de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ telle que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $g(x,y) = a(x)$, soit $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = a(x)f(x,y)$.

Conclusion : $\boxed{\text{On a bien l'équivalence}}$

(b) Soit f solution de $(\mathcal{E})$ et ne s'anulant pas sur $\mathbb{R}$. On a donc l'existence du a et du 1.(a)

Analyse : Si on pose $f(x,y) = F(x)$ (y fixé), alors $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = a(x)f(x,y)$ s'écrit $F'(x) = ax(x)F(x)$, soit à l'aide des équations différentielles du 1er ordre linéaires : $F(x) = \lambda e^{A(x)}$ où A est une primitive de a.

Synthèse : Notons A une primitive de a sur $\mathbb{R}$ (qui existe car a est continue sur $\mathbb{R}$) et considérons g définie sur $\mathbb{R}^2$ par $g(x,y) = f(x,y)e^{-A(x)}$. Comme a est C^1 sur $\mathbb{R}$, A est C^2 sur $\mathbb{R}$ et donc g est a est C^2 sur $\mathbb{R}^2$. Dérivons par rapport à x : $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)e^{-A(x)} - f(x,y)a(x)e^{-A(x)} = 0$. Comme $\mathbb{R}^2$ est convexe, il existe une fonction ψ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ telle que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $g(x,y) = \psi(y)$ et donc $f(x,y) = \varphi(x)\psi(y)$ avec $\varphi(x) = e^{A(x)}$.

Comme on a $\psi(y) = f(x,y)e^{-A(x)}$, ψ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ par TG et ne s'anunle pas sur $\mathbb{R}$. On en déduit que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = \varphi(x)\psi(y)$ avec φ et ψ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et ne s'anunlent pas sur $\mathbb{R}$.

Réciproquement si $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = \varphi(x)\psi(y)$ avec φ et ψ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et ne s'anunlent pas sur $\mathbb{R}$, alors f est clairement C^2, ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et vérifie

$f(x,y)\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \varphi(x)\psi(y)\varphi'(x)\psi'(y) - \varphi'(x)\psi(y)\varphi(x)\psi'(y) = 0.$

Conclusion : $\boxed{\text{On a bien l'équivalence}}$

On n'a pas l'unicité car si (φ, ψ) convient alors $(2\varphi, \frac{1}{2}\psi)$ convient aussi !

(c) Si f vérifie $\mathcal{E}$ et ne s'annule pas alors il existe φ, ψ C^2 et ne s'annulant pas tel que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$f(x,y) = \varphi(x)\psi(y)$, donc $f(x,0) = \varphi(x)\psi(0)$ et $f(0,y) = \varphi(0)\psi(y)$.

Posons alors $\varphi_0(x) = g(x)$, $\psi_0(y) = \lambda h(y)$ et $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = \varphi_0(x)\psi_0(y)$, donc

$f(x,0) = \varphi_0(x)\psi_0(0) = g(x)\lambda h(0)$ et $f(0,y) = \varphi_0(0)\psi_0(y) = g(0)\lambda h(y)$. Comme $g(0) = h(0)$, $\lambda = \dfrac{1}{g(0)}$ convient et

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = g(x)\ \frac{h(y)}{g(0)}$$

Pour l'unicité si f_1 et f_2 sont 2 telles fonctions, on a $f_1(x,y) = \varphi_1(x)\psi_1(y)$, et $f_2(x,y) = \varphi_2(x)\psi_2(y)$, d'où

$f_1(x,0) = \varphi_1(x)\psi_1(0) = f_2(x,0) = \varphi_2(x)\psi_2(0) = g(x)$ et

$f_1(0,y) = \varphi_1(0)\psi_1(y) = f_2(0,y) = \varphi_2(0)\psi_2(y) = h(y)$ d'où il existe 2 réels α et β tels que $\varphi_2 = \alpha\varphi_1$ et $\psi_2 = \beta\psi_1$

On en déduit que $f_1(0,0) = f_2(0,0) = \varphi_1(0)\psi_1(0) = \alpha\beta\varphi_1(0)\psi_1(0) = g(0)$ $(= h(0))$ comme tout est non nul, on a donc $\alpha\beta = 1$ et donc $f_1 = f_2$ et l'on a l'unicité.

Conclusion : $\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = g(x)\ \dfrac{h(y)}{g(0)} \text{ convient et est unique}}$

2.

(a) Petite erreur d'énoncé : lire $y \longmapsto f(x_0, y)$ et non $y \longmapsto f(x, y_0)$.

Soit (x_0, y_0) un maximum local de f. Soit $r > 0$ tel que $\forall (x,y) \in [x_0 - r, x_0 + r] \times [y_0 - r, y_0 + r]$, $f(x,y) \leqslant f(x_0, y_0)$ et donc $\forall x \in [x_0 - r, x_0 + r]$, $f(x, y_0) \leqslant f(x_0, y_0)$ d'où x_0 est un maximum local de $x \longmapsto f(x, y_0)$. On fait de même pour $y \longmapsto f(x_0, y)$ qui admet un maximum local en y_0.

Réciproquement soient x_0 un maximum local de $x \longmapsto f(x, y_0)$ et y_0 un maximum local de $y \longmapsto f(x_0, y)$.

Il existe φ et ψ telle que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = \varphi(x)\psi(y)$. Comme f ne s'annule pas, φ et ψ non plus. Par valeurs intermédiaires elles ne changent donc pas de signe. Quitte à changer φ en $-\varphi$ et ψ en et $-\psi$, on peut supposer que $\varphi > 0$ et comme f est positive, on en déduit que ψ aussi.

D'autre part, $\varphi(x) = \dfrac{f(x, y_0)}{\psi(y_0)}$, donc φ admet un maximum en x_0. De même ψ admet un maximum en y_0. On a donc l'existence d'un $r > 0$ tel que $\forall x \in [x_0 - r, x_0 + r]$ $\varphi(x) \leqslant \varphi(x_0)$ et $\forall x \in [y_0 - r, y_0 + r]$ $\psi(y) \leqslant \psi(y_0)$ et

Comme tout est strictement positif, on en déduit que

$\forall x \in [x_0 - r, x_0 + r] \times [y_0 - r, y_0 + r]$ $f(x,y) = \varphi(x)\psi(x) \leqslant \varphi(x_0)\psi(y_0) = f(x_0, y_0)$.

Conclusion :

$\boxed{f \text{ admet un maximum local en } (x_0, y_0) \text{ SSI } x_0 \text{ est un max. local de } x \longmapsto f(x, y_0) \text{ et } y_0 \text{ un max. local de } y \longmapsto f(x_0, y).}$

(b) Soit $A = \{x_0 \in \mathbb{R}$ tel que x_0 soit un maximum de $x \longmapsto f(x, y_0)\}$ et $B = \{y_0 \in \mathbb{R}$ tel que y_0 soit un maximum de $y \longmapsto f(x_0, y)\}$. On a alors

Conclusion : $\boxed{A \times B = \{(x_0, y_0) \text{ tel que } f \text{ admet un maximum local en } (x_0, y_0)\ \}}$

3.

(a) Considérons h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(t) = t^3 + |t|^3$. On a donc

$$h(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t < 0 \\ 2t^3 \text{ si } t \geqslant 0 \end{cases} \quad \text{d'où } h'(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t < 0 \\ 6t^2 \text{ si } t > 0 \end{cases} \quad \text{et } h''(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t < 0 \\ 12t \text{ si } t > 0 \end{cases}$$

Les limites de h, h' et h'' à gauche et à droite en 0 sont toutes égales à 0. Par le théorème de prolongement des fonctions de classe C^k, h est donc de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. On en déduit par TG que f est C^2 sur $\mathbb{R}^2$ ($f(x,y) = h(xy)$).

(b) On a $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = yh'(xy)$ $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = xh'(xy)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = h'(xy) + xyh''(xy)$

$$f(x,y)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = h(xy)\ h'(xy) + xyh''(xy) - yh'(xy)xh'(xy) = \begin{cases} 0 \text{ si } xy < 0 \\ 36x^5y^5 - 36x^5y^5 - = 0 \text{ si } xy \geqslant 0 \end{cases}$$

Conclusion : $\boxed{f \text{ vérifie } (\mathcal{E})}$

(c) Supposons qu'il existe φ et ψ telles que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = \varphi(x)\psi(y)$ $f(1,1) = \varphi(1)\psi(1) = 2$ donc $\varphi(1) \neq 0$ et $\psi(1) \neq 0$, $f(-1,-1) = \varphi(-1)\psi(-1) = 2$ donc $\varphi(-1) \neq 0$ et $\psi(-1) \neq 0$ et enfin $f(-1,1) = \varphi(-1)\psi(1) \neq 0$ or $f(-1,1) = 0$ car $(-1,1)$ est dans la zone $xy < 0$: Absurde !

Conclusion : $\boxed{\text{Il n'existe pas } \varphi \text{ et } \psi \text{ telles que } \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = \varphi(x)\psi(y)}$

Exercice III

1.

(a) Si $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in F^{\perp}$ et si f est le projecteur orthogonal vectoriel sur F alors

$\|f(x)\|^2 = \|y\|^2 \leqslant \|y\|^2 + \|z\|^2 = \|x\|^2$, donc $\|f(x)\| \leqslant \|(x)\|$ et égalité SSI $z = 0$ c'est-à-dire SSI $x \in F$. On en déduit que $p(A)p(B) = \|\pi(\overrightarrow{AB})\| \leqslant \|\overrightarrow{AB}\| = AB$ et égalité SSI $\overrightarrow{AB}$ $\in$vect$(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}) = \overrightarrow{k}^{\perp}$.

Conclusion : $\boxed{p(A)p(B) \leqslant AB \text{ et égalité SSI } \overrightarrow{AB} \in \text{vect}(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}) = \overrightarrow{k}^{\perp}.}$

(b) On a $D = A+$vect$(\overrightarrow{u})$ et donc $p(D) = p(A)+$vect$(\overrightarrow{\pi(u)})$.

Si $\overrightarrow{u} = \lambda \overrightarrow{k}$ alors $\overrightarrow{\pi(u)} = \overrightarrow{0}$ et $p(D) = \{p(A)\}$

Si $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{k})$ est libre alors $\overrightarrow{\pi(u)} \neq \overrightarrow{0}$ et $p(D)$ est la droite passant par $p(A)$ et dirrigée par le vecteur $\overrightarrow{\pi(u)}$.

2.

(a) p est une bijection affine de d vers D, comme $h \in d = p(D)$, il existe un unique point $H \in D$ tel que $h = p(H)$

Conclusion : $\boxed{\text{On a l'existence et l'unicité du point } H}$

(b) $\overrightarrow{OH'} \in \overrightarrow{\Delta} = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})^{\perp}$ et $O \in \Pi$ donc $O = p(H')$. D'autre part $h = p(H)$ et $\overrightarrow{H'H} \in \overrightarrow{\Delta}^{\perp}$ =vect$(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. D'après le 1 (a), on a donc $p(H')p(H) = H'H$ soit $\underline{Oh = H'H}$

Si $M \in \Delta$ et $N \in D$, $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MH'} + \overrightarrow{H'H} + \overrightarrow{HN} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ avec $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{MH'} + \overrightarrow{HN}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{H'H}$

$\overrightarrow{u} \in F = \overrightarrow{\Delta} + \overrightarrow{D}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{H'H} \in \overrightarrow{\Delta}^{\perp}$ et comme $(0hHH')$ est un parallèlogramme ($(0h)$ est parallèle à HH' et $(0H')$ est parallèle à hH), on a $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{H'H} = \overrightarrow{0h} \in D^{\perp}$.

On en déduit que $\overrightarrow{v} \in F^{\perp}$. D'après Pythagore, on a $MN^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 \geqslant \|\overrightarrow{v}\|^2 = Oh^2$ (avec égalité SSI $\overrightarrow{u} = 0$ soit comme Δ et ND non parallèles, donc SSI $\overrightarrow{MH'} + \overrightarrow{HN} = 0$ SSI $M = H$ et $H = N$)

Conclusion : $\boxed{\forall (M, N) \in \Delta \times D,\ HH' = Oh \leqslant MN}$

3.

(a) $\mathcal{C} \cap \Pi$ est le cercle de centre O et de rayon 1, donc d'équation $x^2 + y^2 = 1$.

Conclusion : $\boxed{\text{L'équation de } \mathcal{C} \text{ est } x^2 + y^2 = 1}$

Paramétrons le cylindre $\mathcal{C}$: $M(u,v) \begin{cases} x = \cos u \\ y = \sin u \\ z = v \end{cases}$, $u \in]-\pi, \pi]$ et $v \in \mathbb{R}$

On a $\dfrac{\partial M}{\partial u}(u,v) \begin{cases} -\sin u \\ \cos u \\ 0 \end{cases}$ et $\dfrac{\partial M}{\partial v}(u,v) \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 1 \end{cases}$ et le point $M(u,v)$ est clairement régulier.

D'où le plan tangent à $\mathcal{C}$ au point $M(u,v)$ a pour équation : $\begin{vmatrix} x - \cos u & -\sin u & 0 \\ y - \sin u & \cos u & 0 \\ z - v & 0 & 1 \end{vmatrix} = x\cos u + y \sin v - 1 = 0$

Conclusion : $\boxed{\text{Les plans tangent à } \mathcal{C} \text{ ont pour équations } x\cos\omega + y\sin\omega = 1}$

(b)

<u>1er Cas</u> : La droite D est parallèle à Δ. La droite D a donc pour équation dans le repère du problème $D\begin{cases} x=a \\ y=b \\ z=z \end{cases}$

Soit $A(a,b,0)\in D$, le projeté de A sur Δ est O donc comme $d(D,\Delta)=1$, on a $OA=1$ et donc $a^2+b^2=1$. On en déduit qu'il existe $\theta\in\mathbb{R}$ tel que $a=\cos\theta$ et $b=\sin\theta$. La droite D est alors clairement incluse dans le plan $P/x\cos\theta+y\sin\theta=1$ qui est un plan tangent à $(\mathcal{C})$

<u>2ème Cas</u> : La droite D n'est pas parallèle à Δ. Soit H et H' définis au 2. On a $d(D,\Delta)=1=HH'$ et si $H'(0,0,u_0)$ alors il existe $\theta\in\mathbb{R}$ tel que $H(\cos\theta,\sin\theta,u_0)$. La droite D est alors clairement incluse dans le plan $P/x\cos\theta+y\sin\theta=1$ qui est un plan tangent à $(\mathcal{C})$

<u>Conclusion</u> : $\boxed{\text{Toute droite } D \text{ distant de } \Delta \text{ de } 1 \text{ est incluse dans un plan tangent à } (\mathcal{C})}$

(c) La réciproque est fausse, en effet soit D la droite $D\begin{cases} x=1 \\ y=3 \\ z=z \end{cases}$. La droite D est incluse dans le plan tangent $P/x\cos\omega+y\sin\omega=1$ avec $\omega=0$. Or $d(D,\Delta)=OH=\sqrt{10}\neq 1$ avec $H(1,3,0)$

4.

(a) Il existe un repère $\mathcal{R}=(O,\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ orthonormé du plan $P_0=O+vect(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$ tel que O' ait pour coordonnées $(1,0)$. Le cercle Γ a pour équation dans ce repère $x^2+y^2=1$ et le cercle Γ' a pour équation dans ce repère

$(x-1)^2+y^2=1$. Soit $M(a,b)\in\Gamma$, la tangente en M à Γ a pour équation $T_{a,b}/ax+by=1$. Soit $M'(a',b')\in\Gamma'$, la tangente en M' à Γ' a pour équation $T'_{a',b'}/(a'-1)x+b'y=a'$.

On cherche donc 2 couples (a,b) et (a',b') tels que $T_{a,b}=T'_{a',b'}$. On fait 2 cas $a'=0$ et $a'\neq 0$ et l'on trouve les 2 tangentes communes d'équation $T/y=1$ et $T/y=-1$.

(b) <u>1er Cas</u> : La droite D est parallèle à Δ et Δ'. Alors il y a exactement 2 points A et A' equidistant de O et O' dans le plan Π. Les 2 droites $A+\overrightarrow{\Delta}$ et $A'+\overrightarrow{\Delta}$ sont les 2 droites parallèles à Δ et Δ' et à 1 de Δ et Δ'.

<u>2ème Cas</u> : La droite D n'est pas parallèle à Δ. Avec les notations du 2. , soit h_1 le projeté de O' sur $d=p(D)$. On a alors $d(D,\Delta)=Oh$ et $d(D,\Delta')=O'h_1$ et donc on doit avoir $\overrightarrow{hh_1}$ colinéaire à $\overrightarrow{OO'}$ et donc la droite d est parallèle à (OO'). Soient d_1 et d_2 les 2 seules droites du plan Π qui sont à 1 de la droite (OO'). Les droites solutions sont les droites de D dont la projection sur Π est d_1 ou d_2.