E3A, 2008, MP, Mathématiques A

(6 pages)

Questions de cours et exemples

1. Un polynôme annulateur de f est un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

2. J_f est un idéal de $\mathbb{R}[X]$ (et accessoirement un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$).

3. Si $J_f \neq \{0\}$, le polynôme minimal de f est l'unique polynôme unitaire π_f tel que $J_f = \pi_f.\mathbb{R}[X]$. C'est aussi le polynôme unitaire appartenant à J_f de plus petit degré.

4. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, $J_f \neq \{0\}$ puisque le polynôme caractéristique de f, χ_f appartient à J_f.

5. 1. On a $M = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ donc $M^2 = M$ et donc, par récurrence, $\underline{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ M^k = M}$.

2. Ainsi $X^2 - X \in J_f$ donc $\pi_f \mid X^2 - X = X(X-1)$ et donc $\pi_f \in \{X, X-1, X^2 - X\}$ (1 n'est pas annulateur si $E \neq \{0\}$). Or $M \neq 0$ et $M \neq I_4$ donc $\underline{\pi_f = X^2 - X}$.

6. 1. ⋄ L'équation homogène $y''+y = 0$ est à coefficients constants et a pour équation caractéristique $X^2+1 = 0$ donc les solutions sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ de $y'' + y = 0$ sont les fonctions $x \mapsto A\cos(x) + B\sin(x)$ pour $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.
Comme $\mathrm{ch}'' = \mathrm{ch}$, une solution particulière de $y'' + y = \mathrm{ch}\,(x)$ est la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{2}\mathrm{ch}\,(x)$ donc <u>les solutions sur $\mathbb{R}$ de $y'' + y = \mathrm{ch}\,(x)$ sont les y : $x \mapsto \dfrac{1}{2}\mathrm{ch}\,(x) + A\cos(x) + B\sin(x)$ pour $(A, B) \in \mathbb{R}^2$</u> .

⋄ De même, <u>les solutions sur $\mathbb{R}$ de $y'' + y = \mathrm{sh}\,(x)$ sont les fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{2}\mathrm{sh}\,(x) + A\cos(x) + B\sin(x)$ pour $(A, B) \in \mathbb{R}^2$</u> .

2. Puisque f est supposée de classe C^4 sur $\mathbb{R}$ alors g est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et donc :

$$\begin{aligned}\Big(f \text{ solution de } (H_1)\Big) &\iff \Big(\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(4)}(x) = f(x)\Big) \\ &\iff \Big(\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(4)}(x) + f''(x) = f(x) + f''(x)\Big) \\ &\iff \Big(\forall x \in \mathbb{R},\ g''(x) = g(x)\Big)\end{aligned}$$

donc $\underline{\Big(f \text{ solution de } (H_1)\Big) \iff \Big(g = f'' + f \text{ solution de } y'' = y\Big)}$.

3. (H_2) : $y'' - y = 0$ est linéaire, homogène, à coefficients constants et a pour équation caractéristique $X^2 - 1 = 0$ donc a pour solutions les fonctions $x \mapsto A\,e^x + B\,e^{-x}$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$, ou aussi, <u>les solutions de (H_2) sont les y : $x \mapsto A\,\mathrm{ch}\,(x) + B\,\mathrm{sh}\,(x)$ pour $(A, B) \in \mathbb{R}^2$</u> .

4. Le principe de superposition des solutions et les résultats de la question [**6.1**] donnent : les solutions de (H_1) sont les $y:\ x \mapsto A\cos(x) + B\sin(x) + C\operatorname{ch}(x) + D\operatorname{sh}(x)$ avec $(A,B,C,D) \in \mathbb{R}^4$.

5. 1. Par définition de E, la famille $(\cos, \sin, \operatorname{ch}, \operatorname{sh})$ en est génératrice. De plus, si $A\cos + B\sin + C\operatorname{ch} + D\operatorname{sh} = 0$ alors, en dérivant deux fois, $-A\cos - B\sin + C\operatorname{ch} + D\operatorname{sh} = 0$ donc $A\cos + B\sin = 0$ et $C\operatorname{ch} + D\operatorname{sh} = 0$. En prenant les valeurs en 0 (par exemple), on obtient $A = B = C = D = 0$ donc cette famille est libre etc'est donc une base de E. Ainsi $\dim(E) = 4$.

2. La dérivation est linéaire et $\big(A\cos + B\sin + C\operatorname{ch} + D\operatorname{sh}\big)' = -A\sin + B\cos + C\operatorname{sh} + D\operatorname{ch} \in E$ donc E est stable. Donc la dérivation induit bien un endomorphisme de E .

3. D'après [**6.4**], E est l'ensemble des solutions de (H_1) donc $\forall y \in E,\ y^{(4)} = \delta^4(y) = y$. Ainsi $X^4 - 1 \in J_\delta$ et $\pi_\delta \mid X^4 - 1$. Si $\pi_\delta \neq X^4 - 1$ alors $\deg(\pi_\delta) \leqslant 3$ donc $\pi_\delta = \sum\limits_{i=0}^{3} a_i X^i$. On alors

$$\begin{aligned}
\forall (A,B,C,D) \in \mathbb{R}^4, \quad 0 &= \pi_\delta(\delta)\big[A\cos + B\sin + C\operatorname{ch} + D\operatorname{sh}\big] \\
&= \sum_{i=0}^{3} a_i \left[A\cos + B\sin + C\operatorname{ch} + D\operatorname{sh}\right]^{(i)} \\
&= \big((a_0 - a_2)A + (a_3 - a_1)B\big)\cos + \big((a_0 - a_2)B + (a_1 - a_3)A\big)\sin \\
&\qquad + \big((a_0 + a_2)C + (a_1 + a_3)D\big)\operatorname{ch} + \big((a_0 + a_2)D + (a_1 + a_3)C\big)\operatorname{sh}
\end{aligned}$$

donc, par liberté de $(\cos, \sin, \operatorname{ch}, \operatorname{sh})$,

$$\forall (A,B,C,D) \in \mathbb{R}^4, \quad \begin{cases} (a_0 - a_2)A + (a_3 - a_1)B = 0 \\ (a_0 - a_2)B + (a_1 - a_3)A = 0 \\ (a_0 + a_2)C + (a_1 + a_3)D = 0 \\ (a_0 + a_2)D + (a_1 + a_3)C = 0 \end{cases}$$

soit $a_0 = a_2 = -a_0$ et $a_1 = a_3 = -a_1$ donc $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0$ ce qui est absurde. Donc $\pi_\delta = X^4 - 1$.

Problème

Partie I

1. On a $\dim(E_n) = n + 1$ et une base est $\left(X^k\right)_{k \in [\![0,n]\!]}$.

2. $\diamond$ $\forall P \in E,\ u(P) = P' \in E$ et $\forall (P,Q) \in E^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ u(P + \lambda Q) = (P + \lambda Q)' = P' + \lambda Q' = u(P) + \lambda u(Q)$ donc $u \in \mathcal{L}(E)$.
De plus, si $\deg(P) \neq 0$, $\deg(P') = \deg(P) - 1$ et si $\deg(P) = 0$, $\deg(P') = -\infty$ donc $u(E_n) \subset E_n$.

$\diamond$ Si $P \neq 0$ et $\deg(P) = d$ avec $P = \sum\limits_{k=0}^{d} a_k X^k$ avec $a_d \neq 0$ alors $v(P) = \sum\limits_{k=0}^{d} a_k (X+1)^k = \sum\limits_{k=0}^{d} a_k \big(X^k + kX^{k-1} + \cdots\big) = a_d X^d + \big(d a_d + a_{d-1}\big) X^{d-1} + \cdots$ donc $v(E_n) \subset E_n$.
On a donc $\forall P \in E,\ v(P) \in E$ et $\forall (P,Q) \in E^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ v(P + \lambda Q) = (P + \lambda Q)(X+1) = P(X+1) + \lambda Q(X+1) = v(P) + \lambda v(Q)$ donc $v \in \mathcal{L}(E)$.

3. $\diamond$ $u(1)=0$ et $\forall k\in\mathbb{N}^*,\ u(X^k)=k\,X^{k-1}$ donc $\underline{U_n=\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&2&\ddots&\vdots\\\vdots&&\ddots&\ddots&0\\\vdots&&&\ddots&n\\0&\cdots&\cdots&0&0\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})}$

$\diamond$ $\forall k\in\mathbb{N},\ v(X^k)=(X+1)^k=\sum\limits_{i=0}^{k}\binom{k}{i}X^i$ donc $\underline{V_n=\begin{pmatrix}1&1&1&\cdots&\cdots&1\\0&1&\binom{2}{1}&\vdots&\vdots&\binom{n}{1}\\\vdots&\ddots&1&\ddots&&\binom{n}{2}\\\vdots&&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\\vdots&&&\ddots&1&\binom{n}{n-1}\\0&\cdots&\cdots&\cdots&0&1\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})}$

4. $\diamond$ $P'=0$ si et seulement si P est constant donc $\underline{\mathrm{Ker}(u_n)=E_0}$ et $\mathrm{Im}(u_n)=\mathrm{Vect}\big(u_n(1),u_n(X),\ldots,u_n(X^n)\big)=\mathrm{Vect}\big(0,1,\ldots,nX^{n-1}\big)$ donc $\underline{\mathrm{Im}(u_n)=E_{n-1}}$.

$\diamond$ $\det(v_n)=\det(V_n)=1\neq 0$ donc v_n est un automorphisme de E_n et donc $\underline{\mathrm{Ker}(v_n)=\{0\}}$ et $\underline{\mathrm{Im}(v_n)=E_n}$.

5. On a $\forall P\in E,\ u\circ v(P)=\big(P(X+1)\big)'=P'(X+1)=v\circ u(P)$ donc $\underline{u_n \text{ et } v_n \text{ commutent}}$.

6. $\diamond$ $\chi_{u_n}=\chi_{U_n}$ donc $\underline{\chi_{u_n}=X^{n+1}}$.

$\diamond$ Donc 0 est valeur propre de multiplicité $n+1$ et l'espace propre associé est $E_0(u_n)=\mathrm{Ker}(u_n)=E_0\neq E_n$ car $n\in\mathbb{N}^*$ donc $\underline{u_n \text{ n'est pas diagonalisable}}$.

7. $\diamond$ $\chi_{v_n}=\chi_{V_n}$ donc $\underline{\chi_{v_n}=(X-1)^{n+1}}$.

$\diamond$ Donc $\mathrm{Sp}(v_n)=\{1\}$ et donc si v_n était diagonalisable sa matrice dans une base de diagonalisation serait I_{n+1} et ceci serait vrai dans toute base donc $\underline{v_n \text{ n'est pas diagonalisable}}$.

8. 1. On a $\forall k\in[\![0,n]\!],\ \deg(Q_k)=k$ donc la famille $\big(Q_k\big)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une famille de degrés étagés donc $\underline{\big(Q_k\big)_{0\leqslant k\leqslant n} \text{ est une base de } E_n}$.

2. $\diamond$ $w_n(Q_0)=v_n(Q_0)-Q_0=Q_0-Q_0$ donc $\underline{w_n(Q_0)=0}$.

$\diamond$ $\forall k\geqslant 2,\ w_n(Q_k)=v_n(Q_k)-Q_k=\dfrac{1}{k!}\prod\limits_{j=0}^{k-1}(X+1-j)-\dfrac{1}{k!}\prod\limits_{j=0}^{k-1}(X-j)=\dfrac{1}{k!}\prod\limits_{j=-1}^{k-2}(X-j)-\dfrac{1}{k!}\prod\limits_{j=0}^{k-1}(X-j)$

$$=\frac{1}{k!}\prod_{j=0}^{k-2}(X-j)\big[(X+1)-(X-k+1)\big]=\frac{k}{k!}\prod_{j=0}^{k-2}(X-j)=\frac{1}{(k-1)!}\prod_{j=0}^{k-2}(X-j)$$

et, pour $k=1$, $w_n(Q_1)=(X+1)-X=1=Q_0$ donc $\underline{\forall k\geqslant 1,\ w_n(Q_k)=Q_{k-1}}$.

3. $\underline{W_n=\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\ddots&\vdots\\\vdots&&\ddots&\ddots&0\\\vdots&&&\ddots&1\\0&\cdots&\cdots&0&0\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})}$

4. On lit sur la matrice W_n: $\mathrm{rg}(W_n)=n$, $Q_0\in\mathrm{Ker}(w_n)$, $\forall k\in[\![0,n-1]\!],\ Q_k\in\mathrm{Im}(w_n)$ donc $\underline{\mathrm{Ker}(w_n)=\mathbb{R}.Q_0}$ et $\underline{\mathrm{Im}(w_n)=\mathrm{Vect}\big(Q_k\big)_{0\leqslant k\leqslant n-1}}$.

5. On a, par récurrence sur j, $w_n^j(Q_k) = \begin{cases} Q_{k-j} & \text{si } j \leqslant k \\ 0 & \text{si } j > k \end{cases}$

9. 1. Puisque $\mathcal{B}$ est une base de E_n, $\forall P \in E_n,\ \exists!\big(\beta_k\big)_{0\leqslant k\leqslant n},\quad P = \sum\limits_{k=0}^{n} \beta_k Q_k$.

2. On a $w_n^j(P) = \sum\limits_{k=0}^{n} \beta_k w_n^j(Q_k) = \begin{cases} \sum\limits_{k=j}^{n} \beta_k Q_{k-j} & \text{si } j \leqslant n, \\ 0 & \text{si } j > n. \end{cases}$ De plus, $Q_i(0) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 0, \\ 0 & \text{si } i \geqslant 1. \end{cases}$

Donc $w_n^j(P)(0) = \begin{cases} \beta_j & \text{si } j \leqslant n, \\ 0 & \text{si } j > n. \end{cases}$

3. Ainsi $\forall k \in [\![0, n]\!],\ \beta_k = w_n^k(P)(0)$. Or $w_n^k = (v_n - e_n)^k = \sum\limits_{j=0}^{k} (-1)^{k-j}\binom{k}{i} v_n^j$ car v_n et e_n commutent. Et, par récurrence facile, $v_n^j(P)(X) = P(X+j)$ donc $w_n^k(P)(X) = \sum\limits_{j=0}^{k} (-1)^{k-j}\binom{k}{j} P(X+j)$. En évaluant en 0, on obtient donc $\forall k \in [\![0, n]\!],\ \beta_k = \sum\limits_{j=0}^{k} (-1)^{k-j}\binom{k}{i} P(j)$.

4. Et donc la base duale de $\mathcal{B}$ est $\mathcal{B}^* = \big(Q_k^*\big)_{0\leqslant k\leqslant n}$ avec $Q_k^*(P) = w_n^k(P)(0) = \sum\limits_{j=0}^{k} (-1)^{k-j}\binom{k}{i} P(j)$.

10. ◇ Selon la question [**8.5**], $\forall k \in [\![0, n]\!],\ w_n^{n+1}(Q_k) = 0$ donc $w_n^{n+1} = \theta_n$.
◇ De la même question on tire $w_n^n(Q_n) = Q_0$.

Partie II

1. Le théorème de Cayley-Hamilton donne $\chi_f \in J_f$ donc $\pi_f \mid \chi_f$.

2. 1. On a, par récurrence sur k, $\forall P \in E,\ u^k(P) = P^{(k)}$. Or, si $P \in E_n$ alors $\deg(P) < n+1$ donc $P^{(n+1)} = 0$. Ainsi $u_n^{n+1} = \theta_n$.

2. De même, $u_n^n\big(X^n\big) = n!$ (en dérivant n fois).

3. Selon [**1**], $u_n^{n+1} = \theta_n$ donc $X^{n+1} \in J_{u_n}$ donc $\pi_{u_n} \mid X^{n+1}$ et donc $\exists\, m \leqslant n+1,\ \pi_{u_n} = X^m$. Si on avait $m \leqslant n$ alors $\pi_{u_n} \mid X^n$ donc $u_n^n = \theta_n$ mais ceci est faux selon [**2**]. Finalement, $\pi_{u_n} = X^{n+1}$.

4. Selon [**I.10**], $w_n^{n+1} = \theta_n$ et $w_n^n \neq \theta_n$ donc, comme ci-dessus, $\pi_{w_n} = X^{n+1}$.

3. 1. $\pi_{v_n} \mid \chi_{v_n} = \chi_{V_n} = (X-1)^{n+1}$ donc $\exists\, m \in [\![1, n+1]\!],\ \pi_{v_n} = (X-1)^m$.

2. Donc $(v_n - e_n)^m = \theta_n$ soit $w_n^m = \theta_n$ donc $\pi_{w_n} \mid X^m$ et donc, vu le résultat de [**2.4**], $m = n+1$.

4. 1. Puisque $\deg(P) = m$, on a $a_m \neq 0$.

2. $r\left(\frac{X^m}{m!}\right) = \sum_{j=0}^{m} a_j u^j \left(\frac{X^m}{m!}\right) = \sum_{j=0}^{m} \frac{a_j}{m!}\, u^j\left(X^m\right) = \sum_{j=0}^{m} \frac{a_j}{m!}\left(X^m\right)^{(j)} = \sum_{j=0}^{m} \frac{a_j}{m!}\, m(m-1)\cdots(m-j+1)\, X^{m-j} = \sum_{j=0}^{m} \frac{a_j}{m!}\, \frac{m!}{(m-j)!}\, X^{m-j}$ donc $\underline{r\left(\frac{X^m}{m!}\right) = \sum_{j=0}^{m} \frac{a_j}{(m-j)!} X^{m-j}}$.

3. Ainsi $r\left(\frac{X^m}{m!}\right) \neq 0$ donc $r \neq \theta$ donc $\forall P \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0\},\ P(u) \neq \theta$ donc $\underline{J_u = \{0\}}$.

5. 1. Soit $P \in J_v$, on a $P(v) = \theta$ donc, par restriction à E_n stable par v, $P(v_n) = \theta_n$ donc $\pi_{v_n} \mid P$. Ceci donne bien, avec le résultat de [**3.2**], $\underline{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (X-1)^{n+1} \mid P}$.

2. Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \exists\, Q_n \in E,\ P = (X-1)^{n+1} Q_n$ donc $\deg(P) = n + 1 + \deg(Q_n)$. En prenant $n \geqslant \deg(P)$, ceci donne $\deg(Q_n) = -\infty$ donc $P = 0$. Donc $\underline{J_v = \{0\}}$.

6. 1. Soit $Q = s(P)$ et $R = s^2(P)$, on a $R(X) = Q(1-X) = P(1-(1-X)) = P(X)$ donc $\underline{s^2 = e\ (s \text{ involution})}$.

2. On a donc $X^2 - 1 \in J_s$ et donc $J_s \neq \{0\}$. Ainsi s a un polynôme minimal π_s et $\pi_s \in \left\{X+1, X-1, X^2-1\right\}$. Or $s \neq e$ car $s(X) = 1 - X \neq X$ et, de même, $s \neq -e$ donc $\pi_s = X^2 - 1$ et $\underline{J_s = (X^2-1).\mathbb{R}[X]}$.

Partie III

1. $\exp(u_n) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{u_n^m}{m!} = \sum_{m=0}^{n} \frac{u_n^m}{m!}$ d'après [**II.2.1**]. On peut donner deux démonstrations de l'égalité demandée :

• **Première démonstration :**
Montrons que $\exp(u_n)$ et v_n coïncident sur la base canonique $\left(X^k\right)_{0 \leqslant k \leqslant n}$:

$$\forall k \in [\![0, n]\!],\quad \begin{aligned} v_n(X^k) &= (X+1)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} X^{k-j} \\ \exp(u_n)(X^k) &= \sum_{m=0}^{n} \frac{u_n^m(X^k)}{m!} = \sum_{m=0}^{k} \frac{k!}{m!(k-m)!} X^{m-k} \text{ selon } [\mathbf{II.4.2}] \end{aligned}$$

et donc $\underline{v_n = \exp(u_n)}$.

• **Deuxième démonstration :**
La formule de Taylor en X appliquée à $P \in E$ donne $P(X+h) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{P^{(m)}(X)}{m!}\, h^m$. En prenant $h = 1$, on obtient $P(X+1) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{P^{(m)}(X)}{m!} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{u_n^m(P)}{m!}$ soit $\underline{v_n = \exp(u_n)}$.

2. 1. D'après [**I.9.3**], $\forall k \in [\![0, n]\!],\ u_n(Q_k) = \sum_{j=0}^{n} w_n^j\left(u_n(Q_k)\right)(0)\, Q_j$. Or u_n et v_n commutent ([**I.5**]) donc u_n et $w_n = v_n - e_n$ également donc $w_n^j\left(u_n(Q_k)\right) = u_n\left(w_n^j(Q_k)\right) = \begin{cases} u_n\left(Q_{k-j}\right) & \text{si } j \leqslant k \\ u_n(0) & \text{si } j > k \end{cases}$ d'après ([**I.8.5**]). Ceci donne $\forall k \in [\![0, n]\!],\ u_n(Q_k) = \sum_{j=0}^{k} u_n\left(Q_{k-j}\right)(0)\, Q_j$ soit $\underline{\forall k \in [\![0, n]\!],\ u_n(Q_k) = \sum_{m=0}^{k} u_n\left(Q_m\right)(0)\, Q_{k-m}}$.

2. $u_n\left(Q_m\right)(0) = Q'_m(0) = \lim\limits_{\substack{X\to 0\\ X\neq 0}} \dfrac{Q_m(X)-Q_m(0)}{X}$ avec $\dfrac{Q_m(X)-Q_m(0)}{X} = \begin{cases} 0 & \text{si } m=0,\\ \dfrac{1}{m!}\prod\limits_{j=1}^{m-1}(X-j) & \text{si } m\geqslant 1.\end{cases}$

Donc $\underline{u_n\left(Q_m\right)(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } m=0,\\ \dfrac{(-1)^{m-1}}{m} & \text{si } m\geqslant 1.\end{cases}}$

3. Ainsi $\forall k\in [\![0,n]\!],\ u_n(Q_k) = \sum\limits_{m=1}^{k} \dfrac{(-1)^{m-1}}{m} Q_{k-m}$. D'autre part,

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{m} \big(v_n - e_n\big)^m (Q_k) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{m} w_n^m(Q_k) = \sum_{m=1}^{k} \frac{(-1)^{m-1}}{m} Q_{k-m} \quad \text{selon } [\mathbf{I.8.5}].$$

Les deux endomorphismes de E_n, u_n et $\sum\limits_{m=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{m-1}}{m}\big(v_n-e_n\big)^m$ coïncident sur la base $\mathcal{B}$ donc ils sont égaux soit $\underline{u_n = \sum\limits_{m=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{m-1}}{m}\big(v_n-e_n\big)^m}$.

* * *
* *
*