E3A, 2007, MP, Mathématiques A

(5 pages)

Partie I

1) $X \longmapsto (F \mid X)$ est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et elle est non nulle car $(F \mid F) \neq 0$ donc son noyau est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et, ainsi, $\underline{H \text{ est un hyperplan de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

2) Posons $Y = {}^tFX$. On a $\forall i \in [\![1, n]\!]^2$ $y_{ii} = \sum_{k=1}^{n} f_{ki}\, x_{ki}$ donc $(F \mid X) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} f_{ki}\, x_{ki}$ donc , puisque $f_{ki} = 1$ pour $i = k$ ou $i = 1$ ou $i = n$ et $f_{ki} = 0$ sinon, on a $\underline{(F \mid X) = \sum_{k=1}^{n} x_{kk} + \sum_{k=2}^{n} x_{k1} + \sum_{k=1}^{n-1} x_{kn}}$.

3) Par définition de H, on a $F \in H^{\perp}$ donc, puisque $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, on a $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = H \oplus \mathbb{R}.F$. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on peut donc écrire $M = N + \lambda F$ avec $N \in H$ et $\lambda F \in H^{\perp}$ et, en prenant le produit scalaire avec F, $(F \mid M) = (F \mid N) + \lambda \|F\|^2 = \lambda \|F\|^2$ donc $\lambda = \dfrac{(F \mid M)}{\|F\|^2}$. On a donc $\forall U \in H,\ M - U = (N - U) + \lambda F$ avec $N - U \in H$. Donc le théorème de Pythagore donne $\|M - U\|^2 = \|N - U\|^2 + \lambda^2 \|F\|^2 \geqslant \lambda^2 \|F\|^2 = \dfrac{(F \mid M)^2}{\|F\|^2}$ donc $\underline{d(M, H) = \dfrac{|(F \mid M)|}{\|F\|}}$.

4) $\|F\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} f_{ki}^2 = n + 2(n-1) = 3n - 2$ donc $\underline{\|F\| = \sqrt{3n-2}}$.

5) a) $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\underline{\mathrm{rg}(B) = 2}$.

b) $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc $\underline{\mathrm{rg}(B^2) = \mathrm{rg}(B) = 2}$.

c) D'après le théorème du rang, $\dim\big(\mathrm{Ker}(g)\big) + \dim\big(\mathrm{Im}(g)\big) = n$ et si $x \in \mathrm{Ker}(g) \cap \mathrm{Im}(g)$, on a $g(x) = 0_E$ et il existe y tel que $x = g(y)$ donc $g^2(y) = 0_E$. Ainsi $y \in \mathrm{Ker}(g^2)$. Mais $\mathrm{Ker}(g) \subset \mathrm{Ker}(g^2)$ et $\dim\big(\mathrm{Ker}(g)\big) = n - 2 = \dim\big(\mathrm{Ker}(g^2)\big)$ puisque, selon [**b**], $\mathrm{rg}(g) = \mathrm{rg}(g^2)$ donc $\mathrm{Ker}(g^2) = \mathrm{Ker}(g)$. On a donc $y \in \mathrm{Ker}(g)$ donc $x = g(y) = 0_E$. Donc $\underline{\mathrm{Ker}(g) \oplus \mathrm{Im}(g) = \mathbb{R}^n}$.

d) Prenons une base $\mathcal{B} = \big(e_1, \ldots, e_{n-2}, e_{n-1}, e_n\big)$ adaptée à la somme directe ci-dessus. On a $g(e_k) = 0_E$ pour $k \in [\![1, n-2]\!]$ et $g(e_k) \in \operatorname{Im} g = \operatorname{Vect}\big(e_{n-1}, e_n\big)$ pour tout k et, notamment pour $k \in \{n-1, n\}$. Donc $\operatorname{Mat}(g, \mathcal{B}) = \left(\begin{array}{c|c} O & O \\ \hline O & B' \end{array}\right)$ avec $B' \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. De plus,

$$2 = \operatorname{rg}(g) = \operatorname{rg}\left(\operatorname{Mat}(g, \mathcal{B})\right) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} O \\ B' \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\left(O \quad {}^tB'\right) = \operatorname{rg}({}^tB') = \operatorname{rg}(B')$$

donc B' est inversible.

Donc B est semblable à une matrice de la forme $\left(\begin{array}{c|c} O & O \\ \hline O & B' \end{array}\right)$ avec $B' \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.

e) ◇ On a directement $\operatorname{Tr}(B) = 0,\ \operatorname{Tr}(B^2) = 2$.

◇ Soient λ et μ, les valeurs propres dans $\mathbb{C}$ de B' (pas forcément distinctes). B' est trigonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ donc semblable à $\begin{pmatrix} \lambda & c \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ et donc B'^2 est semblable à $\begin{pmatrix} \lambda^2 & c(\lambda+\mu) \\ 0 & \mu^2 \end{pmatrix}$. Or, selon [**d**], $\operatorname{Tr}(B) = \operatorname{Tr}(B')$ donc $\lambda + \mu = 0$ et [**d**] donne aussi que B^2 est semblable à $\left(\begin{array}{c|c} O & O \\ \hline O & B'^2 \end{array}\right)$ donc $\operatorname{Tr}(B^2) = \operatorname{Tr}(B'^2)$ soit $\lambda^2 + \mu^2 = 2$. On a donc $\mu = -\lambda$ et $2\lambda^2 = 2$ donc $\operatorname{Sp}(B') = \{-1, 1\}$.

f) $F.\vec{x} = \alpha\vec{x} \Leftrightarrow (I_n + B).\vec{x} = \alpha\vec{x}$ donc $F.\vec{x} = \alpha\vec{x} \Leftrightarrow B.\vec{x} = (\alpha - 1)\vec{x}$ donc $\operatorname{Sp}(F) = \big\{1 + \beta \mid \beta \in \operatorname{Sp}(B)\big\}$ et $E_\alpha(F) = E_{\alpha-1}(B)$. Comme $\chi_B = X^{n-2}\,\chi_{B'} = X^{n-2}\,(X+1)(X-1)$, $\operatorname{Sp}(B) = \{-1, 1, 0\}$ et, puisque $m(1) = m(-1) = 1$, $\dim\big(E_{-1}(B)\big) = \dim\big(E_1(B)\big) = 1$. D'autre part, on a $\dim\big(E_0(B)\big) = \dim(\operatorname{Ker} g) = n - 2$. Donc $\operatorname{Sp}(F) = \{0, 1, 2\}$ avec $\dim\big(E_0(F)\big) = \dim\big(E_2(F)\big) = 1$ et $\dim\big(E_1(F)\big) = n - 2$.

6) D'après la formule du [**3**], il suffit de calculer $(F \mid P({}^tF)) = \operatorname{Tr}\big({}^tFP({}^tF)\big) = \operatorname{Tr}\big(S({}^tF)\big)$ en notant $S(X) = XP(X)$. Or $\dim\big(E_0(F)\big) + \dim\big(E_2(F)\big) + \dim\big(E_1(F)\big) = n$ donc $E_0(F) \oplus E_2(F) \oplus E_1(F) = \mathbb{R}^n$ c'est à dire que F est diagonalisable donc ${}^tF$ également. Ainsi $S({}^tF)$ est semblable à $\operatorname{Diag}\big(S(1), \ldots, S(1), S(0), S(2)\big)$ donc $\operatorname{Tr}\big(S({}^tF)\big) = (n-2)S(1) + S(0) + S(2) = (n-2)P(1) + 2P(2)$. Donc $d\big(P({}^tF), H\big) = \dfrac{\big|(n-2)P(1) + 2P(2)\big|}{\sqrt{3n-2}}$.

Partie II

1) a) Par caractérisation de la borne inférieure, $\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, y \in H,\quad d(x_0, H) \leqslant \|x_0 - y\| < d(x_0, H) + \varepsilon$. On applique ceci à $\varepsilon = \dfrac{1}{n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$ et on note y_n un des $y \in H$ vérifiant l'inégalité. On a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad y_n \in H \quad \text{ et } \quad d(x_0, H) \leqslant \|x_0 - y_n\| < d(x_0, H) + \frac{1}{n+1}$$

donc il existe une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ y_n \in H$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \|x_0 - y_n\| = d(x_0, H)$.

b) On a $\forall n \in \mathbb{N},\ \|y_n\| = \|y_n - x_0 + x_0\| \leqslant \|y_n - x_0\| + \|x_0\|$ et la suite $\big(\|x_0 - y_n\|\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée puisqu'elle converge donc la suite $\big(\|y_n\|\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi bornée. Le théorème de Bolzano-Weierstrass donne alors l'existence d'une suite $(y_{\varphi(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ extraite de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge dans E. Mais, quand E est de dimension finie, tous ses sous-espaces vectoriels sont fermés donc H est fermé. Comme $\forall p \in \mathbb{N},\ y_{\varphi(p)} \in H$, on a $z_0 = \lim\limits_{p\to+\infty} y_{\varphi(p)} \in H$. D'autre part, la suite $\big(\|x_0 - y_{\varphi(p)}\|\big)_{p\in\mathbb{N}}$ est extraite de la suite $\big(\|x_0 - y_n\|\big)_{n\in\mathbb{N}}$

qui converge vers $d(x_0, H)$ donc elle converge vers la même limite. Enfin, par continuité de la norme, $\|x_0 - y_{\varphi(p)}\| \xrightarrow[p\to+\infty]{} \|x_0 - z_0\|$ et donc, par unicité de la limite, $\|x_0 - z_0\| = d(x_0, H)$.

En conclusion, $\underline{\exists\, z_0 \in H,\ \|x_0 - z_0\| = d(x_0, H)}$.

2) a) Par définition, $\operatorname{Ker} h = h^{-1}\big(\{0_{\mathbb{R}}\}\big)$ et le singleton $\{0_{\mathbb{R}}\}$ est un fermé de $\mathbb{R}$. Or l'image réciproque d'un fermé par une application continue est un fermé donc si h est continue alors $\operatorname{Ker} h$ est fermé dans E .

b) Supposons que la forme linéaire h ne soit pas continue, on a $\operatorname{non}\Big(\exists K \geqslant 0,\ \forall x \in E,\ |h(x)| \leqslant K\,\|x\|\Big)$ soit $\forall K \geqslant 0,\ \exists x \in E,\ |h(x)| > K\,\|x\|$. Appliquons ceci à $K = n+1$ pour $n \in \mathbb{N}$ et notons x_n un $x \in E$ vérifiant la propriété: on a donc $|h(x_n)| > (n+1)\,\|x_n\|$. Ceci montre que $h(x_n) \neq 0$, on peut donc poser $t_n = \dfrac{x_n}{h(x_n)}$. On a alors $h(t_n) = \dfrac{h(x_n)}{h(x_n)} = 1$ et $\|t_n\| = \dfrac{\|x_n\|}{|h(x_n)|} < \dfrac{1}{n+1}$ donc $t_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0_E$.
On a donc $\forall n \in \mathbb{N},\ h(t_n - t_0) = h(t_n) - h(t_0) = 1 - 1 = 0$ donc $\forall n \in \mathbb{N},\ t_n - t_0 \in H$ et $t_n - t_0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} -t_0$ donc, puisque H est fermé, $-t_0 \in H$. Mais ceci est faux car $h(-t_0) = -h(t_0) = -1$.
L'hypothèse de départ était donc fausse et on a bien si $\operatorname{Ker} h$ est fermé dans E alors h est continue .

c) $\overline{H} \supset H$ donc $\overline{H} \neq 0$ et si $(x, y) \in \overline{H}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, la caractérisation séquentielle de l'adhérence donne l'existence de deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N},\ (x_n, y_n) \in H^2,\ \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x,\ \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = y$ et alors , par linéarité de la limite, $x + \lambda y = \lim\limits_{n\to+\infty} (x_n + \lambda y_n)$ avec $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n + \lambda y_n \in H$ et donc $x + \lambda y \in \overline{H}$. Donc $\overline{H}$ est un sous-espace vectoriel de E .

d) Puisque $H \subset \overline{H}$, on a soit $H = \overline{H}$ et, dans ce cas, H est fermé, soit $H \subsetneq \overline{H}$. Si $H \subsetneq \overline{H}$, prenons $a \in \overline{H} \setminus H$ et soit $x \in E$ quelconque. On a $h(a) \neq 0$ puisque $a \notin H$ et on peut donc écrire $x = \dfrac{h(x)}{h(a)} a + \left(x - \dfrac{h(x)}{h(a)} a\right)$ avec $a \in \overline{H}$ et $h\left(x - \dfrac{h(x)}{h(a)} a\right) = h(x) - \dfrac{h(x)}{h(a)} h(a) = 0$ donc $\left(x - \dfrac{h(x)}{h(a)} a\right) \in H \subset \overline{H}$. Puisque $\overline{H}$ est un sous-espace vectoriel de E, on a donc $x \in \overline{H}$ ce qui donne $E \subset \overline{H}$.
On peut donc conclure : H est fermé ou dense .

Partie III

1) Soit $x \in H^\perp$. Par densité de H dans E, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \in H$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$. On a donc $\forall n \in \mathbb{N},\ (x \mid x_n) = 0$. Mais, par continuité du produit scalaire, $(x \mid x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} (x \mid x)$ donc $(x \mid x) = 0$ et donc $x = 0_E$. Réciproquement $0_E \in H^\perp$ donc $\underline{H^\perp = \{0_E\}}$.

2) $H \oplus H^\perp = H \oplus \{0_E\}$ donc $\underline{H \oplus H^\perp = H}$.

3) Pour tout $x \in E$, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \in H$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$. On a, par définition, $0 \leqslant d(x, H) \leqslant \|x - x_n\|$ car $x_n \in H$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \|x - x_n\| = 0$ donc $\underline{\forall x \in E,\ d(x, H) = 0}$.

4) Si $d(x, H)$ est atteinte, il existe $z_0 \in H$ tel que $0 = d(x, H) = \|x - z_0\|$ donc $x = z_0$ et $x \in H$. La réciproque est claire donc $d(x, H)$ n'est atteinte que si $x \in H$.

Partie IV

1) a) On a $\forall x \in E,\ |h(x)| \leqslant |||\,h\,|||\ \|x\|$ donc, pour $x = x_0 - y$, $|h(x_0)| \leqslant |||\,h\,|||\ \|x_0 - y\|$. Or $|||\,h\,||| \neq 0$ car h est non nulle donc $\underline{\forall y \in H,\ \|x_0 - y\| \geqslant \dfrac{|h(x_0)|}{|||\,h\,|||}}$.

b) La borne inférieure étant le plus grand des minorants, $\underline{d(x_0, H) \geqslant \dfrac{|h(x_0)|}{|||\,h\,|||}}$.

c) Si $d(x_0, H) = 0$, l'inégalité ci-dessus donne $h(x_0) = 0$ donc $x_0 \in H$. La réciproque est évidente donc $\underline{d(x_0, H) = 0 \Leftrightarrow x_0 \in H}$.

d) α) Par caractérisation de la borne supérieure, $\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, w \neq 0_E,\quad |||\,h\,||| \geqslant \dfrac{|h(w)|}{\|w\|} > |||\,h\,||| - \varepsilon$. On applique ceci à $\varepsilon = \dfrac{1}{n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$ et on note w_n un de ces $w \neq 0_E$. On a $\forall n \in \mathbb{N},\ |||\,h\,||| - \dfrac{1}{n+1} < \dfrac{|h(w_n)|}{\|w_n\|} \leqslant |||\,h\,|||$ donc il existe $\underline{(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ telle que } \forall n \in \mathbb{N},\ w_n \in E \setminus \{0_E\} \text{ et } |||\,h\,||| = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{|h(w_n)|}{\|w_n\|}}$.

β) $\diamond$ Puisque $x_0 \notin H$, on peut écrire tout $x \in E$ sous la forme $x = \dfrac{h(x)}{h(x_0)} x_0 + \left(x - \dfrac{h(x)}{h(x_0)} x_0\right) = \lambda x_0 + y$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $y \in H$ (vérification immédiate). Ainsi $\underline{\forall n \in \mathbb{N},\ \exists\, (\lambda_n, y_n) \in \mathbb{R} \times H,\ w_n = \lambda_n x_0 + y_n}$.

$\diamond$ Erreur d'énoncé: la condition $\lambda_n \neq 0$ n'est, en général, pas vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}$. Il suffit, par exemple, de choisir $w_0 \in H$ pour avoir $\lambda_0 = 0$ car l'écriture ci-dessus est unique puisque la somme $\mathbb{R}.x_0 \oplus H$ est directe. On ne modifie pas la valeur de la limite de $\dfrac{|h(w_n)|}{\|w_n\|}$ en modifiant la valeur de w_0 (ou d'un nombre fini de termes) donc [α] est toujours vérifié.

$\diamond$ Par contre, on a $\underline{\exists\, n_0,\ \forall n \geqslant n_0,\ \lambda_n \neq 0}$ car $\dfrac{|h(w_n)|}{\|w_n\|} \xrightarrow[n\to+\infty]{} |||\,h\,||| > 0$ donc $\exists\, n_0,\ \forall n \geqslant n_0,\ \dfrac{|h(w_n)|}{\|w_n\|} > 0$ donc $\forall n \geqslant n_0,\ h(w_n) \neq 0$ et donc $\lambda_n = \dfrac{h(w_n)}{h(x_0)} \neq 0$.

γ) D'une part, $|h(w_n)| = |\lambda_n h(x_0) + y_n| = |\lambda_n|\,|h(x_0)|$ et, d'autre part, $\forall n \geqslant n_0,\ \|w_n\| = |\lambda_n| \left\| x_0 - \dfrac{-y_n}{\lambda_n} \right\| \geqslant |\lambda_n|\, d(x_0, H)$ car $\dfrac{-y_n}{\lambda_n} \in H$. Donc, puisque $\|w_n\| \neq 0$, $|\lambda_n| \neq 0$ pour $n \geqslant n_0$ et $d(x_0, H) \neq 0$ pour $x_0 \notin H$, on a

$$\forall n \geqslant n_0, \quad \frac{|h(w_n)|}{\|w_n\|} = \frac{|\lambda_n|\,|h(x_0)|}{\|w_n\|} \leqslant \frac{\lambda_n|\,|h(x_0)|}{|\lambda_n|\, d(x_0, H)} = \frac{|h(x_0)|}{d(x_0, H)} .$$

En faisant abstraction de l'erreur d'énoncé signalée plus haut, on a bien $\underline{\forall n \geqslant n_0,\ \dfrac{|h(w_n)|}{\|w_n\|} \leqslant \dfrac{|h(x_0)|}{d(x_0, H)}}$.

e) En passant à la limite dans l'inégalité précédente, on obtient $|||\,h\,||| \leqslant \dfrac{|h(x_0)|}{d(x_0, H)}$ donc $d(x_0, H) \leqslant \dfrac{|h(x_0)|}{|||\,h\,|||}$ et on a obtenu l'inégalité inverse au [**c**] donc $\underline{d(x_0, H) = \dfrac{|h(x_0)|}{|||\,h\,|||}}$.

2) a) On a $\forall n \in \mathbb{N},\ \left|\dfrac{u_n}{2^{n+1}}\right| \leqslant \dfrac{\|u\|_\infty}{2^{n+1}}$ et cette série majorante converge car c'est une série géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ donc $\underline{\left(\sum \dfrac{u_n}{2^{n+1}}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est absolument convergente}}$.

b) D'après [**a**], h est bien définie. Pour tout $(u, v) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$h(u + \lambda v) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n + \lambda v_n}{2^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{2^{n+1}} + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{v_n}{2^{n+1}} = h(u) + \lambda h(v)$$

car toutes les séries convergent. Donc $h \in E^*$. D'autre part, l'inégalité vue au [**a**] donne

$$\forall u \in E, \quad |h(u)| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{u_n}{2^{n+1}} \right| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|u_n|}{2^{n+1}} \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|u\|_\infty}{2^{n+1}} = \|u\|_\infty \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \|u\|_\infty$$

ce qui montre la continuité de h. De plus, $\forall u \neq 0$, $\dfrac{|h(u)|}{\|u\|_\infty} \leqslant 1$ donc, en prenant la borne supérieure, $|||\, h \,||| \leqslant 1$. Donc $\underline{h \text{ est une forme linéaire continue et } |||\, h \,||| \leqslant 1}$.

c) $\diamond$ On a clairement $v_p \in E$ et $\|v_p\|_\infty = 1$. Or

$$h(v_p) = \sum_{n=0}^{p} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{p} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} \frac{1 - \frac{1}{2^{p+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^{p+1}} > 0$$

donc $\dfrac{|h(v_p)|}{\|v_p\|_\infty} = 1 - \dfrac{1}{2^{p+1}}$ et donc $\underline{\dfrac{|h(v_p)|}{\|v_p\|_\infty} \xrightarrow[p \to +\infty]{} 1}$.

$\diamond$ On a $\dfrac{|h(v_p)|}{\|v_p\|_\infty} \leqslant |||\, h \,||| \leqslant 1$ donc $\underline{|||\, h \,||| = 1}$.

d) Supposons qu'il existe $u \neq 0_E$ tel que $\dfrac{|h(u)|}{\|u\|_\infty} = |||\, h \,||| = 1$ on a donc $|h(u)| = \|u\|_\infty$ et toutes les inégalités du [**b**] sont des égalités. En particulier, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{|u_n|}{2^{n+1}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{\|u\|_\infty}{2^{n+1}}$ donc $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{\|u\|_\infty - |u_n|}{2^{n+1}} = 0$ avec $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{\|u\|_\infty - |u_n|}{2^{n+1}} \geqslant 0$ donc on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| = \|u\|_\infty$. Mais alors $|u_n| \xrightarrow[n \to +\infty]{} \|u\|_\infty \neq 0$ en contradiction avec le fait que $u \in E$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} |u_n| = 0$.

Donc $\underline{\text{il n'existe pas de } u \in E \setminus \{0_E\} \text{ tel que } \dfrac{|h(u)|}{\|u\|_\infty} = |||\, h \,|||}$.

e) Il suffit d'utiliser le résultat du [**II.a**]: puisque h est continue, $\underline{H = \operatorname{Ker} h \text{ est fermé}}$.

f) Soit $x_0 \notin H$, si $d(x_0, H)$ était atteinte alors $\exists\, z_0 \in H$, $d(x_0, H) = \|x_0 - z_0\|$. Or, selon [**1.e**], $d(x_0, H) = \dfrac{|h(x_0)|}{|||\, h \,|||}$ donc $\|x_0 - z_0\| = \dfrac{|h(x_0)|}{|||\, h \,|||} = \dfrac{|h(x_0) - h(z_0)|}{|||\, h \,|||}$ et donc, puisque $x_0 - z_0 \neq 0_E$, $\dfrac{|h(x_0 - z_0)|}{\|x_0 - z_0\|} = |||\, h \,|||$ ce qui est impossible vu [**d**]. Donc $\underline{\text{pour } x \notin H,\ d(x, H) \text{ n'est jamais atteinte}}$.

* * *
* *
*