E3A 2006-MP B : corrigé

Exercice 1

1. Si on pose $a_n = \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k u_k$ et $b_n = \sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k u_k$, avec $u_k > 0$ pour tout k de $\mathbb{N}$ et la décroissance de (u_k), les deux suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes de limite commune $S = \sum_{n\geqslant 0}(-1)^n u_n$: c'est le théorème de convergence relatif aux séries alternées.

   On a également, pour tout n de $\mathbb{N}$ l'encadrement $b_n \leqslant S \leqslant a_n$ et pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $b_{n-1} \leqslant S \leqslant a_n$ qui donne pour tout n de $\mathbb{N}$, avec $S_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k u_k$, la majoration bien connue $|S - S_n| \leqslant u_{n+1}$.

   On a notamment $S_1 \leqslant S \leqslant S_0$, c'est-à-dire $0 \leqslant u_0 - u_1 \leqslant S \leqslant u_0$, ce qui assure $S \geqslant 0$: la somme a le signe du premier terme et lui est inférieure en valeur absolue.

   Donc, ici, R_n est du signe de $(-1)^n$, R_{n+1} est du signe opposé et avec $R_n = (-1)^n u_n + R_{n+1}$ et $|R_{n+1}| \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$, on obtient $|R_n| = u_n - |R_{n+1}|$, d'où : $\boxed{|R_n| + |R_{n+1}| = u_n}$ et $|R_n| - |R_{n+1}| = u_n - 2\,|R_{n+1}|$.

2. a) Il suffit alors de ré-écrire cette dernière égalité, en observant que toutes les séries numériques créees par découpage sont bien convergentes (avec le théorème rappelé ci-dessus)

$$u_n - 2\,|R_{n+1}| = u_n - 2\,(-1)^{n+1} \sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^k u_k$$
$$u_n - 2\,|R_{n+1}| = [u_n - \sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^{n+k+1} u_k] - \sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^{n+k+1} u_k$$
$$u_n - 2\,|R_{n+1}| = \sum_{k=n}^{\infty}(-1)^{n+k} u_k - \sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p u_{n+p+1}$$
$$u_n - 2\,|R_{n+1}| = \sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p u_{n+p} - \sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p u_{n+p+1},$$

   et finalement : $\boxed{u_n - 2\,|R_{n+1}| = \sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p\,[u_{n+p} - u_{n+p+1}]}$.

   b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Si on pose $v_p = u_{n+p} - u_{n+p+1}$ pour tout p de $\mathbb{N}$, alors l' hypothèse *iii*) de l'énoncé se traduit en $v_p \geqslant 0$ pour tout p de $\mathbb{N}$, et l'hypothèse *iv*) se traduit en $v_{p+1} \geqslant v_p$, c'est-à-dire (v_p) décroissante.

   La suite (u_n) étant de limite nulle, il en est de même pour la suite (v_p) et la série de terme général $(-1)^p v_p$ vérifient toutes les hypothèses du théorème relatif à la convergence des séries alternées.

   Ainsi $\sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p\,[u_{n+p} - u_{n+p+1}]$ est du signe de $u_n - u_{n+1}$, c'est-à-dire positif, et finalement $\boxed{(|R_n|) \text{ est décroissante}}$.

3. Avec $|R_{n+1}| \leqslant |R_n|$ et la première égalité on a $u_n \leqslant 2\,|R_n|$, c'est-à-dire $\boxed{\frac{u_n}{2} \leqslant |R_n| \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}}$, et avec $2\,|R_n| \leqslant |R_{n-1}| + |R_n| = u_{n-1}$ on

obtient de même $\boxed{|R_n| \leqslant \frac{u_{n-1}}{2} \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^*}$.

4. Avec $u_n \neq 0$ pour tout n de $\mathbb{N}$, on a pour tout n de $\mathbb{N}^*$,
$$1 \leqslant \frac{|R_n|}{u_n/2} \leqslant \frac{u_{n-1}}{u_n},$$
et avec l'hypothése $ii)$ de l'énoncé et le signe déjà connu de R_n, on obtient
$$\boxed{R_n \underset{n\to\infty}{\sim} (-1)^n \frac{u_n}{2}}\ .$$

5. On pose $f(t) = \frac{\ln t}{t}$ pour tout $t > 0$.
On a $f(t) > 0$ pour tout $t > 1$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0$.
La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et avec $f'(t) = \frac{1-\ln t}{t^2}$, f est (strictement) décroissante sur $[\mathrm{e}, +\infty[$.
On a $\ln(t+1) = \ln t + \ln(1+\frac{1}{t})$, donc $f(t+1) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{\ln t}{t} = f(t)$, c'est-à-dire $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{f(t+1)}{f(t)} = 1$.
Enfin, avec $f''(t) = \frac{-t-2\,t(1-\ln t)}{t^4} = \frac{-3+2\,\ln t}{t^3}$, on a $f''(t) \geqslant 0$ pour tout $t \geqslant \mathrm{e}^{3/2}$ et la fonction f est convexe sur $[\mathrm{e}^{3/2}, +\infty[$, donc $\frac{f(t+1)-f(t)}{(t+1)-(t)} \leqslant \frac{f(t+2)-f(t+1)}{(t+2)-(t+1)}$ (croissance des pentes des sécantes), c'est-à-dire
$$f(t+2) - f(t+1) \geqslant f(t+1) - f(t).$$
Avec $\mathrm{e}^{3/2} < \mathrm{e}^2 < 9$ (en fait $\mathrm{e}^{3/2} \in]4, 5[$), si on pose $u_n = f(n+9)$ pour tout n de $\mathbb{N}$, alors ce qui précède montre que la suite (u_n) vérifie les quatre hypothèses $i)$, $ii)$, $iii)$ et $iv)$ de l'énoncé. On a donc, avec 4)
$$\sum_{k=n}^{\infty} (-1)^k \frac{\ln(k+9)}{k+9} \underset{n\to\infty}{\sim} (-1)^n \frac{\ln(n+9)}{2\,(n+9)},$$
$$\text{c'est-à-dire : } -\sum_{k=n+9}^{\infty} (-1)^k \frac{\ln(k)}{k} \underset{n\to\infty}{\sim} -(-1)^{n+9} \frac{\ln(n+9)}{2\,(n+9)},$$
et finalement $\boxed{\sum\limits_{k=n}^{\infty} (-1)^k \frac{\ln(k)}{k} \underset{n\to\infty}{\sim} (-1)^n \frac{\ln n}{2\,n}}$.

Exercice 2

La série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n\, t^n$ est de rayon infini et pour tout t de $\mathbb{R}$, $\sum_{n\geqslant 0} a_n\, t^n$ est absolument convergente.

1. Pour tout $t > 0$, $|b_n|\ t^n \underset{n\to\infty}{\sim} |a_n|\ t^n$ donc la convergence absolue de $\sum_{n\geqslant 0} a_n\, t^n$ entraine la convergence absolue de $\sum_{n\geqslant 0} b_n\, t^n$: la série entière $\sum_{n\geqslant 0} b_n\, t^n$ est de rayon de convergence infini, c'est-à-dire $\boxed{g \text{ est définie sur } \mathbb{R}}$.
2. Avec $b_n > 0$, on a $a_n \underset{n\to\infty}{\sim} b_n \iff \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$.
   En posant $\gamma_n = \frac{a_n}{b_n} - 1$, on a $a_n = b_n\,(1+\gamma_n)$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n = 0$.
3. a) Pour tout $m \in \mathbb{N}$, la suite $(\gamma_n)_{n\geqslant m}$ étant convergente, elle est bornée, c'est-à-dire qu'il existe un $\delta_m = \sup\limits_{n\geqslant m} |\gamma_n|$: pour tout $n \geqslant m$, $|\gamma_n| \leqslant \delta_m$.

   b) Pour tout $t > 0$, on a $g(t) > \sum\limits_{n=m+1}^{\infty} b_n\, t^n > b_{m+1}\, t^{m+1} > 0$, puis
   $$\frac{f(t)}{g(t)} - 1 = \frac{f(t)-g(t)}{g(t)} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty}(a_n-b_n)\, t^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n\, t^n} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n\, b_n\, t^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n\, t^n},$$
   $$\left|\frac{f(t)}{g(t)} - 1\right| \leqslant \frac{\sum_{n=0}^{m}|\gamma_n|\, b_n\, t^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n\, t^n} + \frac{\sum_{n=m+1}^{\infty}|\gamma_n|\, b_n\, t^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n\, t^n} \leqslant \frac{\sum_{n=0}^{m}|\gamma_n|\, b_n\, t^n}{b_{m+1}\, t^{m+1}} + \delta_m \frac{\sum_{n=m+1}^{\infty} b_n\, t^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n\, t^n},$$
   et finalement $\boxed{\left|\frac{f(t)}{g(t)} - 1\right| \leqslant \frac{\sum_{n=0}^{m}|\gamma_n|\, b_n\, t^n}{b_{m+1}\, t^{m+1}} + \delta_m}$.

   c) On a donc $\left|\frac{f(t)}{g(t)} - 1\right| \leqslant \delta_m + \sum_{n=0}^{m} |\gamma_n|\ \frac{b_n}{b_{m+1}}\ \frac{1}{t^{m-n+1}}$.
   La convergence de la suite (γ_n) vers 0 entraine la convergence de la suite (δ_n) vers 0, donc si $\varepsilon > 0$ est fixé il existe un N de $\mathbb{N}$ tel que $m \geqslant N$ entraine $\delta_m \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.
   Alors pour tout n de $[\![0, N]\!]$ on a $\lim\limits_{t\to+\infty} |\gamma_n|\ \frac{b_n}{b_{N+1}}\ \frac{1}{t^{N-n+1}} = 0$, donc pour tout n de $[\![0, N]\!]$, il existe un $\alpha_n > 0$ tel que $t \geqslant \alpha_n$ entraine
   $$|\gamma_n|\ \frac{b_n}{b_{N+1}}\ \frac{1}{t^{N-n+1}} < \frac{\varepsilon}{2\,(N+1)}.$$
   Finalement, si $A = \max\limits_{0\leqslant n\leqslant N} \alpha_n$, pour tout $t \geqslant A$ on a
   $$\left|\frac{f(t)}{g(t)} - 1\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + (N+1)\,\frac{\varepsilon}{2\,(N+1)} = \varepsilon.$$
   Cela signifie $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{g(t)} = 1$, c'est-à-dire $\boxed{f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} g(t)}$.
4. a) On a $\ln[(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}] = (n+1)\ \ln(1+\frac{1}{n+1})$ et $\lim\limits_{n\to\infty} (n+1)\ \ln(1+\frac{1}{n+1}) = 1$, c'est-à-dire par continuité de la fonction exponentielle $\lim\limits_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n+1})^{n+1} = \mathrm{e}$.
   On en déduit que pour tout t de $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n+1})^{n+1}\, \frac{t^n}{n!} = 0$: avec le lemme d'Abel, la série entière $\sum_{n\geqslant 0}(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}\, \frac{t^n}{n!}$ est de rayon infini, c'est-à-dire que $\boxed{h \text{ est définie sur } \mathbb{R}}$.

b) Avec $\frac{(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}}{n!} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}}{n!}$ et ce qui précède on a $h(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \mathrm{e} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$, c'est-à-dire finalement $\boxed{h(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{t+1}}$.

5. a) Soit $y(t) = t + \sum_{n=2}^{\infty} a_n\, t^n$ la somme d'une série entière de rayon $R > 0$ solution de (E) sur in intervalle $I \subset]-R, R[$.
Pour tout t de $]-R, R[$, on a

$$y'(t) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} n\, a_n\, t^{n-1},\ y''(t) = \sum_{n=2}^{\infty} n\,(n-1)\, a_n\, t^{n-2},$$

$$\text{et } \sum_{n=2}^{\infty} n\,(n-1)\, a_n\, t^{n-1} + [1 + \sum_{n=2}^{\infty} n\, a_n\, t^{n-1}] - t - \sum_{n=2}^{\infty} n\, a_n\, t^n = 1,$$

$$-t + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)^2\, a_{n+1}\, t^n - \sum_{n=2}^{\infty} n\, a_n\, t^n = 0,$$

$$(4\, a_2 - 1)\, t + \sum_{n=2}^{\infty} [(n+1)^2\, a_{n+1} - n\, a_n]\, t^n = 0,$$

et, avec l'unicité du développement en série entière de la fonction nulle, on a $a_2 = \frac{1}{4}$ et pour tout $n \geqslant 2$, $a_{n+1} = \frac{n}{(n+1)^2}\, a_n$, c'est-à-dire en fait $\boxed{a_n = \frac{n-1}{n^2}\, a_{n-1} \text{ pour tout } n \geqslant 2}$.
Avec $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$, cela définit une unique suite (a_n) à termes strictement positifs pour $n \geqslant 1$.
Pour tout $t > 0$ on a $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}\, t^{n+1}}{a_n\, t^n} = 0$, donc la série entière $\sum_{n\geqslant 1} a_n\, t^n$ est de rayon de convergence infini.
Par récurrence on a, pour tout $n \geqslant 1$, $a_n = \frac{(n-1)!}{(n!)^2}$, c'est-à-dire

$$\boxed{\forall n \geqslant 1,\ a_n = \frac{1}{n \cdot n!}}.$$

On obtient : $z(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n \cdot n!}$ pour tout t de $\mathbb{R}$, unique solution de (E) somme d'une série entière et telle que $z(0) = 0$ et $z'(0) = 1$.

b) On obtient alors $\boxed{z'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{n!} = \begin{cases} \frac{\mathrm{e}^t - 1}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}}$.

c) Pour tout $t > 0$, on a $t\, z(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n+1}}{n\, n!}$.
Avec $n\, n! \underset{n\to\infty}{\sim} (n+1)!$ et ce qui précède on a donc

$$t\, z(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} = \mathrm{e}^t - 1 - t,$$

et finalement $\boxed{z(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^t}{t}}$.

Exercice 3

Pour que certaines sommes qui apparaissent dans ce qui suit aient un sens, on suppose $n \geqslant 4$, mais en fait en les adaptant les résultats sont valables à partir de $n = 2$.

1. a) Pour tout z de $\mathbb{C}$, on a

$$\chi_F(z) = \det(F - z \cdot I_n) = \begin{vmatrix} -z & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -z \end{vmatrix}_n ,$$

et en développant suivant la première colonne, on a

$$\chi_F(z) = -z \begin{vmatrix} -z & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -z \end{vmatrix}_{n-1} + (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -z & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -z & 1 \end{vmatrix}_{n-1} ,$$

c'est-à-dire finalement $\boxed{\chi_F(z) = (-1)^n\,(z^n - 1)}$

Les valeurs propres de F sont donc les n racines n-ièmes de l'unité : $\boxed{\lambda_k = \exp[\frac{2\,\mathrm{i}\,(k-1)\,\pi}{n}],\ \text{pour } k \in \{1, \cdots, n\}}$.

(la suite de l'énoncé sous-entend plutôt $\lambda_k = \exp[\frac{2\,\mathrm{i}\,k\,\pi}{n}]$, pour $k \in \{1, \cdots, n\}$, c'est-à-dire $\lambda_n = 1$)

b) La matrice F ayant un polynôme caractéristique scindé à racines simples, $\boxed{F \text{ est diagonalisable}}$ (et les sous-espaces propres sont des droites vectorielles). Comme 0 n'est pas valeur propre, $\boxed{F \text{ est inversible}}$.

c) On considère le morphisme de groupes ψ de $(\mathbb{Z}, +)$ dans $(GL_n(\mathbb{C}), \times)$ défini par $\psi(k) = F^k$ (F est inversible).

On sait que l'image de ψ est un groupe monogène (engendré par F). Il reste à savoir s'il est fini (cyclique) ou non, c'est-à-dire si ψ est injectif ou non.

Son noyau est $\{k \in \mathbb{Z}, F^k = I_n\}$. Avec le théorème de Cayley-Hamilton on a $F^n = I_n$, donc $n \in \ker\psi$ et $\ker\psi$ contient le sous-groupe additif $n\,\mathbb{Z}$ (ensemble des multiples de n) de $\mathbb{Z}$. Ainsi $\boxed{G \text{ est cyclique}}$.

En fait, le polynôme minimal de F est égal à son polynôme caractérique (au facteur $(-1)^n$ près) car tout polynôme annulateur doit avoir pour racines les valeurs propres, donc $\ker\psi = n\,\mathbb{Z}$. Ainsi $(G, \times)$ est isomorphe, en tant que groupe, à $(\mathbb{Z}/n\,\mathbb{Z},+)$. On sait que les générateurs de ce groupe sont les classes des entiers premiers avec n, ainsi

$$\boxed{\text{les générateurs de } G \text{ sont les } F^k \text{ avec } 1 \leqslant k \leqslant n \text{ et } k \wedge n = 1}\,.$$

Il y en a $\varphi(n)$, où φ est la fonction indicatrice d'Euler.

d) Pour tout k de $\mathbb{N}$, si r est le représentant de la classe de k modulo n, on a $F^k = F^r$, ainsi $G = \{F^k,\ 0 \leqslant k \leqslant n-1\}$

La famille $(F^k)_{0\leqslant k\leqslant n-1}$ est libre car si elle était liée on aurait l'existence d'un n-uplet non nul $(a_k)_{0\leqslant k\leqslant n-1}$ de $\mathbb{C}^n$ tel que $\sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k\,F^k = 0$, c'est-à-dire un polynôme $P(X) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k\,X^k$, annulateur de F et de degré strictement inférieur à n, ce qui est contradictoire avec le fait que le polynôme minimal est de degré n.

Finalement, G est une base de l'espace qu'elle engendre :

$$\boxed{\dim[\mathrm{Vect}(G)] = n \text{ et } (F^k)_{0\leqslant k\leqslant n-1} \text{ est une base de } \mathrm{Vect}(G)}\,.$$

e) Si $\mathcal{B} = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est la base canonique de $\mathbb{C}^n$, l'endomorphisme f canoniquement associé à F est défini par $f(e_i) = e_{\sigma(i)}$, où $\sigma = (n,\ n-1,\ \cdots,\ 2,\ 1)$ est le cycle d'ordre n, permutation de $[\![1,n]\!]$ telle que $\sigma(i) = i-1$ pour tout i de $[\![2,n]\!]$ et $\sigma(1) = n$.

Alors pour tout k de $[\![1,n]\!]$, F^k est la matrice de l'endomorphisme f^k, défini par $f^k(e_i) = e_{\sigma^k(i)}$ pour tout i de $[\![1,n]\!]$. En indexant la base $\mathcal{B}$ avec les classes modulo n, $\mathcal{B} = (e_{\bar\imath})_{1\leqslant i\leqslant n}$ on obtient $f(e_{\bar\imath}) = e_{\overline{\imath-k}}$.

Le i-ème élément de la diagonale de F^k est la coordonnée de $f^k(e_i)$ suivant e_i, elle est nulle si $\overline{\imath-k} \neq \bar\imath$, c'est-à-dire si $\overline{k} \neq 0$, et elle vaut 1 sinon, cad si $k \in n\,\mathbb{Z}$. Finalement

$$\boxed{\mathrm{tr}(F^p) = \begin{cases} n & \text{si } p \in n\,\mathbb{Z} \\ 0 & \text{si } p \notin n\,Z \end{cases}}\,.$$

2. a) On sait que F est diagonalisable, donc il existe un Q de $GL_n(\mathbb{C})$ tel que $Q^{-1}\,F\,Q = D$, avec $D = \mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$

(on peut prendre $Q = \left([\exp(\frac{2\mathrm{i}\,\pi}{n})]^{(r-1)\,(s-1)}\right)_{\substack{1\leqslant r\leqslant n\\ 1\leqslant s\leqslant n}}$, mais cela n'est pas demandé ici).

Si $P(X) = \sum_{k=1}^{n} k\,X^{k-1}$, on a alors

$$Q^{-1}\,P(F)\,Q = P(D) = \mathrm{diag}[P(\lambda_1,\cdots,P(\lambda_n)],$$

ce qui donne les valeurs propres de $A = P(F)$ (et aussi, en passant, la diagonalisibilité de A et en fait la co-diagonalisabilité de $\{M(A),\ M \in \mathbb{K}[X]\}$).

On a $\lambda_1 = 1$, donc $P(1) = \sum\limits_{k=1}^{n} k = \frac{n\,(n+1)}{2}$.

Si on pose $R(X) = X^n - 1 = (X-1)\,S(X)$, avec $S(X) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} X^k$, on a

$$n\,X^{n-1} = R'(X) = S(X) + (X-1)\,S'(X),$$

avec $S'(X) = \sum\limits_{k=1}^{n-1} k\,X^{k-1} = P(X) - n\,X^{n-1}$, c'est-à-dire

$$P(X) = \frac{n\,X^{n-1} - \frac{X^n - 1}{(X-1)}}{X-1} + n\,X^{n-1} = n\,\frac{X^n}{X-1} - \frac{X^n-1}{(X-1)^2}.$$

Pour $k \in [\![2, n]\!]$, on a $P(\lambda_k) = \frac{n}{\lambda_k - 1}$.

Compte-tenu de notre indexation des racines de l'unité on obtient :

$$\boxed{\text{les valeurs propres de } A \text{ sont } \{\tfrac{n\,(n+1)}{2}\} \cup \{\tfrac{n}{\lambda_k-1},\ 2 \leqslant k \leqslant n\}}\ .$$

b) On a alors $\det(A) = \frac{n\,(n+1)}{2} \prod\limits_{k=2}^{n} \frac{n}{\lambda_k - 1} = \frac{n^n\,(n+1)}{2\prod_{k=2}^{n}(\lambda_k-1)}$.

Les $(\lambda_k - 1)$ pour $k \in [\![2, n]\!]$ sont les racines du polynôme

$$S(X+1) = \sum_{k=0}^{n-1} (X+1)^k,$$

qui est scindé, de degré $n-1$, de coefficient dominant 1 et de terme constant n (somme des termes constants des $(X+1)^k$), donc avec les formules de Newton (relations coefficients-racines pour les polynômes scindés), on a

$$\prod_{k=2}^{n} (\lambda_k - 1) = (-1)^{n-1}\,\frac{n}{1} = (-1)^{n-1}\,n.$$

Finalement, $\boxed{\det(A) = (-1)^{n-1}\frac{(n+1)\,n^{n-1}}{2}}$.

3. a) Le déterminant de A étant non nul, A est inversible. Le polynôme caractéristique de A est de la forme

$$\chi_A(t) = \det(A) + \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k\,t^k + (-1)^n\,t^n.$$

Avec le théorème de Cayley-Hamilton, on a

$$0_n = \det(A)\cdot I_n + \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k\,A^k + (-1)^n\,A^n, \ \text{ c'est-à-dire}$$

$$A \times \frac{1}{\det(A)} \cdot \Big[(-1)^{n-1}\,A^{n-1} - \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k\,A^{k-1}\Big] = I_n,$$

ce qui donne $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot [(-1)^{n-1}\,A^{n-1} - \sum\limits_{k=1}^{n-1} \alpha_k\,A^{k-1}]$,

c'est-à-dire $\boxed{A^{-1} \in \mathrm{Vect}(\{A^k,\ 0 \leqslant k \leqslant n-1\})}$.

b) On pose $H = \mathrm{Vect}(G)$.

Pour tout k de $\mathbb{N}$, $A^k = [P(F)]^k = P^k(F) \in H$ (l'application $P \mapsto P(F)$ est un morphisme d'algèbre).Comme $\{F^k,\ 0 \leqslant k \leqslant n-1\}$ est une base de H,

$$\boxed{\text{il existe un (unique) } (u_k)_{0\leqslant k\leqslant n-1} \text{ tel que } A^{-1} = \sum_{k=0}^{n-1} u_k\, F^k}\ .$$

c) Avec $(X-1)^2\,P(X) = n\,(X-1)\,X^n + (X^n-1)$ (voir 2-a) et $F^n = I_n$, on obtient

$$\boxed{(F-I_n)^2\,A = n\,(F-I_n)}\ .$$

d) On en tire $(F-I_n)^2 = n\,(F-I_n)\,A^{-1}$, c'est-à-dire , pour $n \geqslant 4$

$$F^2 - 2\,F + I_n = n\left[\sum_{k=0}^{n-1} u_k\,F^{k+1} - \sum_{k=0}^{n-1} u_k\,F^k\right],$$

$$F^2 - 2\,F + I_n = n\left[(u_{n-1}-u_0)\,I_n + \sum_{k=1}^{n-1}(u_{k-1}-u_k)\,F^k\right],$$

$$(u_{n-1}-u_0-\tfrac{1}{n})\,I_n + (u_0-u_1+\tfrac{2}{n})\,F + (u_1-u_2-\tfrac{1}{n})\,F^2 + \sum_{k=3}^{n-1}(u_{k-1}-u_k)\,F^k = 0.$$

La famille $(F^k)_{0\leqslant k\leqslant n-1}$ étant libre on obtient

$$\begin{cases} u_{n-1}-u_0 = \frac{1}{n} \\ u_0-u_1 = -\frac{2}{n} \\ u_1-u_2 = \frac{1}{n} \\ \forall k \in [\![3, n-1]\!]\ u_{k-1} = u_k \end{cases},$$

ce qui est équivalent à $\boxed{\begin{cases} u_2 = u_3 = \cdots = u_{n-1} \\ u_2 - u_0 = \frac{1}{n} \\ u_1 - u_2 = \frac{1}{n} \end{cases}}$.

e) Avec 1-e) et la linéarité de la trace, on a $\mathrm{tr}(A) = n\,u_0$.

La matrice A^{-1} a pour valeurs propres les inverses de celles de A, donc, avec $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 0$ c'est-à-dire $\sum_{k=2}^{n} \lambda_k = -1$,

$$\mathrm{tr}(A) = \frac{2}{n\,(n+1)} + \sum_{k=2}^{n} \frac{\lambda_k - 1}{n} = \frac{2}{n\,(n+1)} + \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\lambda_k - \frac{n-1}{n} = \frac{2}{n\,(n+1)} - 1 = \frac{2-n-n^2}{n\,(n+1)}.$$

Finalement, $\boxed{u_0 = \frac{2-n-n^2}{n^2\,(n+1)}}$.

f) Alors $u_2 = \frac{1}{n} + \frac{2-n-n^2}{n^2\,(n+1)} = \frac{2}{n^2\,(n+1)}$ et $u_1 = u_2 + \frac{1}{n} = \frac{n^2+n+2}{n^2\,(n+1)}$ et finalement

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{n^2\,(n+1)} \cdot \left[(2-n-n^2)\,I_n + (n^2+n+2)\,F + 2\,\sum_{k=2}^{n-1} F^k\right]}\ ,$$

ou si l'on préfère,

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{n^2\,(n+1)} \begin{pmatrix} a_n & b_n & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 2 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & b_n \\ 2 & \cdots & \cdots & 2 & a_n \end{pmatrix}, \text{ où } a_n = 2-n-n^2 \text{ et } b_n = n^2+n+2}\ .$$