Remarques :
En partie I, question 1c. : le sujet donne $B_c = \{c_0, c_1, \dots, c_{p-1}\}$ au lieu de $B_c = \{c^0, c^1, \dots, c^{p-1}\}$.
La définition des endomorphismes induits en I2 est trange.

Concours E3A - 2004
Mathématiques A - Corrigé

Préliminaires

1a. Par la formule du binôme : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k = (1+1)^n = 2^n$.

1b. On sait que $\mathcal{L}(E)$ muni de $+$ et $\circ$ est un anneau, dans lequel I et T commutent : $I \circ T = T \circ I = T$. On peut donc appliquer la formule du binôme à $(I+T)^n$, d'où $\displaystyle (I+T)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k T^k = I + \sum_{k=1}^{n} C_n^k T^k$.

1c. Soit $u \in E$; une récurrence immédiate sur k fournit $T^k(u)_0 = u_k$ pour tout $k \in \mathbf{N}$. On en déduit $\displaystyle L(u)_0 = \sum_{k=0}^{n} C_n^k T^k(u)_0 = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u_k$.

2a. Puisque f est clairement continue par morceaux et 2π-périodique, on peut calculer ses coefficients de Fourier. Puisque f est impaire, on a $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, et

$$\forall n \in \mathbf{N}^* \quad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin nt\, dt = \frac{2}{n\pi}\big[-\cos nt\big]_{t=0}^{\pi} = \frac{2\big(1-(-1)^n\big)}{n\pi}$$

Plus précisément, pour tout $p \in \mathbf{N}$, $b_{2p+1} = \dfrac{4}{(2p+1)\pi}$, et, pour tout $p \in \mathbf{N}^*$, $b_{2p} = 0$.

2b. On voit clairement sur un schéma que f est continue par morceaux, de classe C^1 par morceaux et que, en chaque point a de discontinuité (les $k\pi$ pour $k \in \mathbf{Z}$), $f(a) = 0$ est la demi-somme de $f(a^-)$ et $f(a^+)$, qui valent $-\pi$ et π (pas forcément dans cet ordre). On sait qu'alors la série de Fourier de f converge simplement vers f.

Les sommes partielles de la série de Fourier sont des polynômes trigonométriques, donc en particulier des fonctions continues. Si la convergence était uniforme sur $\mathbf{R}$, la limite f de ces sommes partielles serait aussi continue, ce qui n'est pas le cas : la convergence n'est donc pas uniforme sur $\mathbf{R}$.

2c. Les questions précédentes fournissent : $\displaystyle \forall t \in \mathbf{R} \quad f(t) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(2n+1)t}{2n+1}$. En appliquant cette égalité à $t = \pi/2$, on obtient $\displaystyle \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$.

Partie I

1a. La suite nulle appartient à Ω_p, et une combinaison linéaire de suites p-périodiques est encore p-périodique ; Ω_p est donc bien un sous-espace de E.

1b. La linéarité de φ est immédiate.

Soit $u \in \Omega_p$, et $r \in \mathbf{N}$. Une récurrence immédiate montre que, pour tout $k \in \mathbf{N}$, $u_{r+kp} = u_r$; en particulier, si $n \in \mathbf{N}$ et si r est le reste dans la division euclidienne de n par p, alors $u_n = u_r$. On en déduit :

- si $u \in \Omega_p$ et $\varphi(u) = 0$, alors $u_r = 0$ pour tout r vérifiant $0 \le r \le p-1$, et donc $u_n = 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ par la remarque précédente ; donc $\ker \varphi = \{0\}$ et φ est injective.
- si $a = (a_0, \dots, a_{p-1}) \in \mathbf{C}^p$, définissons la suite u par : pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = a_r$ où r est le reste dans la division euclidienne de n par p. Il est alors clair que $u \in \Omega_p$ et que $\varphi(u) = a$, d'où la surjectivité de φ.

Puisque $\mathbf{C}^p$ est de dimension p et isomorphe à E, on en déduit que E est de dimension finie et $\dim E = p$.

1c. Pour tout $k \in \{0, \dots, p-1\}$, $\varphi(c^k)$ est l'élément de $\mathbf{C}^p$ dont toutes les composantes sont nulles, sauf celle d'indice $k+1$ qui vaut 1, donc est le $k+1$-ème vecteur de la base canonique de $\mathbf{C}^p$. Par suite, B_c est l'image de la base canonique de $\mathbf{C}$ par l'isomorphisme φ^{-1}, c'est donc une base de E.

2a. Si $u \in \Omega_p$ et $n \in \mathbf{N}$, alors $T(u)_{n+p} = u_{n+p+1} = u_{n+1} = T(u)_n$ et donc $T(u) \in \Omega_p$. Donc Ω_p est stable par T ; il l'est clairement par I, donc Ω_p est aussi stable par $L = I + T$.

2b. Si $u \in \ker t$, alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $t(u)_n = u_{n+1} = 0$ donc $u_n = 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$; et donc $u_0 = u_p = 0$ puisque $p \geq 2$. Par suite $\ker t = \{0\}$.

Puisque t est un endomorphisme d'un espace de dimension finie, c'est donc un automorphisme de E.

2c. i) Par définition de l, on a, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $l(u)_n = u_n + u_{n+1}$. On obtient donc le système $(\mathcal{S})$ en écrivant l'égalité $l(u)_n = 0$ pour $n \in \{0, \ldots, p-1\}$ et en remplaçant dans la dernière équation u_p par u_0.

2c. ii) Les $p-1$ premières équations expriment que la suite est géométrique de raison -1 jusqu'au rang $p-1$; le système $(\mathcal{S})$ équivaut donc à $\begin{cases} \forall k \in \{1, \ldots, p-1\} \quad u_k = (-1)^k u_0 \\ u_0 = (-1)^p u_0 \end{cases}$

Si p est impair, la dernière équation fournit $u_0 = 0$ et donc $u_k = 0$ pour tout k : la seule solution est le p-uplet nul.

Si p est pair, la dernière équation s'élimine ; les solutions de $(\mathcal{S})$ sont donc les p-uplets de la forme $u_0.(1, -1, 1, -1, \ldots, 1, -1)$ où $u_0 \in \mathbf{C}$, qui forment une droite vectorielle de $\mathbf{C}^p$.

2c. iii) D'après i), le système $(\mathcal{S})$ équivaut en fait à $\varphi\big(l(u)\big) = 0$, donc à $l(u) = 0$ puisque φ est un isomorphisme ; les éléments de $\ker l$ sont donc exactement les u de Ω_p tels que $\varphi(u)$ vérifie $(\mathcal{S})$.

D'après ii), $\ker l = \{0\}$ si p est impair ; et, si p est pair, $\ker l$ est la droite vectorielle engendrée par la suite $\big((-1)^n\big)$ (qui est bien dans Ω_p puisque p est pair).

3a. Soit $u \in \Omega_p$; alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $t^p(u)_n = u_{n+p} = u_n$ donc $t^p(u) = u$, ce qui achève la démonstration.

Par suite t admet $X^p - 1$ pour polynôme annulateur ; ce polynôme est scindé à racines simples (les p racines p-ièmes de l'unité), donc t est diagonalisable.

3b. Les valeurs propres de t sont forcément racines du polynôme annulateur trouvé en **3a.**

3c. Pour tout $j \in \{0, \ldots, p-1\}$, définissons ε^j par $\varepsilon^j_n = (\omega_j)^n$ pour tout n. On a alors

- $\varepsilon^j_0 = 1$ et donc en particulier $\varepsilon^j \neq 0$.
- $\forall n \in \mathbf{N}$ $\varepsilon^j_{n+p} = (\omega_j)^{n+p} = (\omega_j)^n = \varepsilon^j_n$ puisque $(\omega_j)^p = 1$; donc $\varepsilon^j \in \Omega_p$.
- $\forall n \in \mathbf{N}$ $t(\varepsilon^j)_n = (\omega_j)^{n+1} = \omega_j \varepsilon^j_n$ donc $t(\varepsilon^j) = \omega_j \varepsilon^j$.

Par suite, pour tout j, ε^j est un vecteur propre de t pour la valeur propre ω_j. Puisque ces vecteurs sont vecteurs propres pour des valeurs propres distinctes, ils sont linéairement indépendants, donc forment une base de Ω_p puisque $\dim \Omega_p = p$.

On a donc déterminé p valeurs propres de t ; puisque $\dim \Omega_p = p$ (ou d'après **3b.**), on a donc toutes les valeurs propres de t.

3d. Si $u \in \Omega_p$, on a clairement $u = \sum_{k=0}^{p-1} u_k c^k$; donc en particulier, pour tout $j \in \{0, \ldots, p-1\}$, $\varepsilon^j = \sum_{k=0}^{p-1} (\omega_j)^k c^k$.

Soit $(i,j) \in \{1, \ldots, p\}^2$; par définition de P, le coefficient P_{ij} situé ligne i colonne j dans P est la coordonnée du j-ième vecteur de B_ε (c'est à dire ε^{j-1}) selon le i-ème vecteur de B_c (c'est à dire c^{i-1}) ; on obtient donc $P_{ij} = (\omega_{j-1})^{i-1}$.

3e. Avec les notations du **3d.**, l'élément Q_{jk} situé ligne j colonne k dans ${}^tP\bar{P}$ vaut

$$\sum_{q=1}^{p} ({}^tP)_{jq} (\bar{P})_{qk} = \sum_{q=1}^{p} (\omega_{j-1})^{q-1} (\bar{\omega}_{k-1})^{q-1} = \sum_{q=1}^{p} \exp\Big(\frac{2(j-k)(q-1)i\pi}{p}\Big) = \sum_{r=0}^{p-1} (e^{i\theta})^r$$

en posant $r = q - 1$ et $\theta = \dfrac{2(j-k)\pi}{p}$.

Puisque j et k sont compris entre 1 et p, on a $j - k \in [-(p-1), p-1]$ donc $\theta \in \,]-\pi, \pi[$; on a donc $e^{i\theta} = 1$ si et seulement si $\theta = 0$, c'est à dire si et seulement si $j = k$.

On a donc $Q_{jj} = p$ pour tout j ; et, si $k \neq j$, $Q_{jj} = \dfrac{1 - e^{ip\theta}}{1 - e^{i\theta}} = 0$ puisque $e^{i\theta}$ est une racine p-ième de l'unité. On a donc bien ${}^tP\bar{P} = pI_p$.

On en déduit, par passage aux transposées et division par p : $\Big(\dfrac{1}{p}{}^t\bar{P}\Big)P = I_p$ et donc $P^{-1} = \dfrac{1}{p}{}^t\bar{P}$.

4a. Pour tout $j \in \{0, \dots, p-1\}$, ε^j est vecteur propre pour t pour la valeur propre ω_j, donc vecteur propre pour l pour la valeur propre $1+\omega_j$. On a donc, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $l^n(u) = \sum_{k=0}^{p-1} x_k(1+\omega_k)^n\varepsilon^k$.

4b. Posons $\theta = 2k\pi/p$; on a donc $\omega_k = e^{i\theta}$. On a alors $1+\omega_k = e^{i\theta/2}(e^{i\theta/2} + e^{-i\theta/2}) = 2\cos(\theta/2)e^{i\theta/2}$. D'autre part, puisque $0 < k < p$, on a $0 < \theta/2 < \pi$ et donc $\left|\dfrac{1+\omega_k}{2}\right| = |\cos(\theta/2)| < 1$. Par suite, $\Big(\dfrac{1+\omega_k}{2}\Big)^n$ a bien pour limite 0.

4c. D'après **4a.**, on a pour tout n $\dfrac{1}{2^n}l^n(u)_0 = \displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} x_k\Big(\frac{1+\omega_k}{2}\Big)^n\varepsilon_0^k$. Puisque $\omega_0 = 1$, le coefficient de ε_0^0 dans cette somme vaut x_0 pour tout n ; et, d'après **4b.**, les autres coefficients ont pour limite 0 quand n tend vers $+\infty$. On en déduit

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n}l^n(u)_0 = x_0\varepsilon_0^0 = x_0$$

D'autre part, les formules de changement de base montrent que $\begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{p-1}\end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_{p-1}\end{pmatrix}$; en particulier, x_0 s'obtient en multipliant la colonne des u_i par la première ligne de P^{-1}.

Puisque $\omega_0 = 1$, le **3d.** montre que les coefficients de la première colonne de P valent tous 1 ; donc, d'après **3e.**, ceux de la première ligne de P^{-1} valent tous $1/p$. On a donc bien $x_0 = (\sum_{k=0}^{p-1} u_k)/p$ ce qui achève la démonstration.

5. Soit $j \in \{0, \dots, p-1\}$. Si l'on applique le **4c.** à la suite $u = c^j$, on obtient $1/p$ comme limite.

D'autre part, le **1c.** des préliminaires montre que, pour tout n, $l^n(c^j)_0 = \sum_{q=0}^n C_n^q c_q^j$. Or c_q^j est nul, sauf si q est congru à j modulo p, c'est à dire est de la forme $kp+j$ où $k \in \mathbf{Z}$ vérifie $0 \le kp+j \le n$ soit $0 \le k \le (n-j)/p$; puisque $c_q^j = 1$ dans ce dernier cas, on a pour tout n $l^n(c^j)_0 = \displaystyle\sum_{0\le k\le(n-j)/p}^{n} C_n^{kp+j}$ et donc

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n}\sum_{0\le k\le(n-j)/p}^{n} C_n^{kp+j} = \frac{1}{p}$$

Partie II

1a. Le **1c.** des Préliminaires fournit $\sum_{k=0}^n C_n^k u_k = L^n(u)_0$ et le **1a.** $\sum_{k=0}^n C_n^k\ell = 2^n\ell$, d'où le résultat.

1b. Notons tout d'abord que la suite $(|u_n - \ell|)$ converge vers 0, donc est bornée, ce qui justifie l'existence des bornes supérieures données dans l'énoncé.

1b. (i) Soit $n \ge N$. Posons $\alpha = \sup\big\{|u_k - \ell|\,;\, k \in \{N+1, \dots, n\}\big\}$. Alors $|u_k - \ell| \le \alpha$ pour tout $k \in \{N+1, \dots, n\}$, et donc

$$|T_N(n)| \le \frac{1}{2^n}\sum_{k=N+1}^{n} C_n^k|u_k-\ell| \le \frac{\alpha}{2^n}\sum_{k=N+1}^{n} C_n^k \le \frac{\alpha}{2^n}\sum_{k=0}^{n} C_n^k = \frac{\alpha}{2^n}\,2^n = \alpha$$

ce qui constitue le résultat demandé.

1b. (ii) Soit toujours $n \ge N$. Notons tout d'abord que, pour tout $k \in \{0, \dots, N\}$, on a

$$0 \le C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{1}{k!}\prod_{q=0}^{k-1}(n-q) \le \frac{1}{k!}\prod_{q=0}^{k-1} n = \frac{n^k}{k!}$$

Posons $\beta = \sup\{|u_k - \ell|\,;\, k \in \{0, \ldots, N\}\}$. On a alors

$$|S_N(n)| \leq \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{N} C_n^k |u_k - \ell| \leq \frac{\beta}{2^n}\sum_{k=0}^{N} C_n^k \leq \frac{\beta}{2^n}\sum_{k=0}^{N}\frac{n^k}{k!} = \frac{\beta}{2^n}\,P_N(n)$$

ce qui constitue le résultat demandé.

1b. (iii) Puisque N est fixé, la suite $\big(P_N(n)\big)$ est polynômiale en n ; plus précisément, $P_N(n)$ est équivalent à $n^N/N!$ quand n tend vers $+\infty$. Donc cette suite est négligeable devant la suite géométrique (2^n), ce qui fournit le résultat.

1c. Soit $\varepsilon > 0$. On peut choisir $N \in \mathbf{N}$ tel que $|u_n - \ell| < \varepsilon/2$ pour tout $n \geq N$. Avec les notations de **1b.**(i), on a donc, pour tout $n \geq N$, $\alpha \leq \varepsilon/2$ donc $|T_N(n)| \leq \varepsilon/2$.

Ayant ainsi fixé N, on peut définir β comme en **1b.**(ii). La suite $(\beta P_N(n)/2^n)$ a pour limite 0 d'après **1b.**(iii), on peut donc choisir $n_0 \geq N$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, on ait $\beta P_N(n)/2^n < \varepsilon/2$. Le **1b.**(ii) montre alors que $|S_N(n)| < \varepsilon/2$ pour tout $n \geq n_0$.

Enfin, le **1a.** montre que $\left|\dfrac{1}{2^n}L^n(u)_0 - \ell\right| = |S_n(n) + T_N(n)| \leq |S_N(n)| + |T_N(n)|$ pour tout $n \geq N$, donc en particulier pour tout $n \geq n_0$. On a donc trouvé un rang n_0 tel que $\left|\dfrac{1}{2^n}L^n(u)_0 - \ell\right| < \varepsilon$ pour tout $n \geq n_0$. Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on a bien $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n}L^n(u)_0 = \ell$.

2a. L'égalité est immédiate pour $n = 0$. Soit alors $n \in \mathbf{N}^*$. Pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, la formule de Pascal fournit $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$. On en déduit

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k s_k &= s_0 + \sum_{k=1}^{n} C_n^k s_k + \sum_{k=1}^{n} C_n^{k-1} s_k + s_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k s_k + \sum_{q=0}^{n-1} C_n^q s_{q+1} + s_{n+1}\\ &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k s_k + \sum_{q=0}^{n} C_n^q s_{q+1}\end{aligned}$$

2b. Soit $n \in \mathbf{N}$. La question précédente fournit

$$\begin{aligned}S_{n+1} - S_n &= \frac{1}{2^{n+1}}\Big(\sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k s_k - 2\sum_{k=0}^{n} C_n^k s_k\Big) = \frac{1}{2^{n+1}}\Big(\sum_{k=0}^{n} C_n^k s_{k+1} - \sum_{k=0}^{n} C_n^k s_k\Big)\\ &= \frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=0}^{n} C_n^k (s_{k+1} - s_k) = \frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=0}^{n} C_n^k u_k\end{aligned}$$

Joint au résultat du **1c.** des préliminaires, cela fournit le résultat.

2c. Classiquement, le **2b.** fournit pour tout $N \in \mathbf{N}$: $\displaystyle\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{2^{n+1}}L^n(u)_0 = \sum_{n=0}^{N}(S_{n+1} - S_n) = S_{N+1} - S_0 = S_{N+1}$.

Posons $\ell = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$. Par définition de la convergence de la série, la suite s a pour limite ℓ. Mais alors la question **1.** montre que la suite $(L^n(s)_0) = (S_n)$ a aussi pour limite ℓ.

Donc la suite des sommes partielles de la série $\sum L^n(u)_0/2^{n+1}$ converge vers ℓ ; autrement dit, la série converge, et a pour somme $\ell = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Partie III

1. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $\displaystyle J_n = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k x^{2k}\,dx = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k C_n^k}{2k+1} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u_k.$

2. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Une intégration par parties fournit $J_n = \left[x(1-x^2)^n\right]_{x=0}^{1} + 2n\int_0^1 x^2(1-x^2)^{n-1}\,dx$. Le crochet vaut 0 puisque $n \geq 1$; en écrivant $x^2 = 1-(1-x^2)$, on obtient alors $J_n = 2n\Big(\int_0^1 (1-x^2)^{n-1}\,dx - \int_0^1 (1-x^2)^n\,dx\Big) = 2nJ_{n-1} - 2nJ_n$ ce qui fournit immédiatement la relation demandée.

Puisque $J_0 = 1$, la formule demandée pour J_n s'en déduit immédiatement par récurrence.

3. La question **2.** des préliminaires montre que la série $\sum u_n$ converge, de somme $\pi/4$.

D'autre part, la question **III-1.** montre que $J_n = L^n(u)_0$ pour tout n ; la question **II-2c.** montre donc que la série $\displaystyle\sum \frac{1}{2^{n+1}} J_n$ converge, de somme $\pi/4$; ce qui, compte tenu du **2.**, fournit le résultat demandé.

4. Le programme Maple suivant

```
u:=evalf(-Pi/4); v:=1 :  n:=0 :
while abs(u)>1/40 do
   u:=u+v/(2*n+1) :  v:= -v :  n:=n+1
od :
n ;
```

me fournit $N_1 = 10$; on obtient de même $N_2 = 4$.

Il me parait abusif de prétendre en conclure quoi que ce soit ; il faudrait au minimum calculer les N associés à différentes valeurs de ε pour avoir une idée des vitesses de convergence comparées des deux séries.