CONCOURS e3a
Epreuve de Mathématiques B MP
durée 3 heures

Exercice 1

1. (i) u est de rang 1 donc $\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Ker} u$ est un sous-espace vectoriel de dimension 0 ou 1.
Si $\dim \operatorname{Im} u \cap \operatorname{Ker} u = 0$, alors $\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Ker} u = \{0\}$ et d'après le théorème du rang, on a $\boxed{E = \operatorname{Im} u \oplus \operatorname{Ker} u.}$
Si $\dim \operatorname{Im} u \cap \operatorname{Ker} u = 1$, alors $\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Ker} u = \operatorname{Im} u$ et on a $\boxed{\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} u.}$
(ii) e est non nul, donc (e) est une famille libre de l'espace vectoriel de dimension finie E. On peut la compléter en une base de E par le théorème de la base incomplète.
$e \in \operatorname{Ker} u$, donc dans une telle base, la première colonne de la matrice de u sera nulle. et toutes les autres colonnes seront dans $\operatorname{Im} u$ donc colinéaires à e d'o une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 0 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$
La trace de cete matrice est nulle donc dans le cas o $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} u$ on a bien $\boxed{\operatorname{Tr} u = 0}$
(iii) u est de rang 1 donc 0 est valeur propre de u et $E_0 = \operatorname{Ker} u$ est de dimension $n-1$.
$\boxed{\text{a)} \Rightarrow \text{b)}}$
u est diagonalisable et $\dim E_0 = n-1$ donc il existe une seconde valeur propre a avec $\dim E_a = 1$.
Dans une base adaptée à la somme directe $E = E_a \oplus E_0$ la matrice de u est $\begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$
On remarque sur la matrice que $\operatorname{Im} u = E_a$. On a donc bien $\boxed{E = \operatorname{Im} u \oplus \operatorname{Ker} u}$
$\boxed{\text{b)} \Rightarrow \text{c) et a)}}$
$\operatorname{Im} u$ est un sous-espace vectoriel de dimension 1, soit e un vecteur générateur de $\operatorname{Im} u$. $u(e) \in \operatorname{Im} u$ donc $u(e)$ est colinéaire à e: il existe un réel a tel que $u(e) = a.e$, de plus, comme $\operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Ker} u$ sont en somme directe, $e \notin \operatorname{Ker} u$ et $a \neq 0$. Dans une base adaptée à la somme directe $E = \operatorname{Im} u \oplus \operatorname{Ker} u$ la matrice de u est $\begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.
On a donc $\boxed{\operatorname{Tr} u = a \neq 0}$ et $\boxed{u \text{ diagonalisable}}$
$\boxed{\text{c)} \Rightarrow \text{b)}}$
On suppose que $\operatorname{Tr}(u) \neq 0$. De la question (ii), on déduit que $\operatorname{Im} u \not\subset \operatorname{Ker} u$ puis de la question (i), on déduit $\boxed{E = \operatorname{Im} u \oplus \operatorname{Ker} u}$

2. (i) F_A est une application de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ dans $\mathbf{C}$ et $\forall (X,Y) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})^2, \quad \forall \lambda \in \mathbf{C} \quad F_A(X + \lambda Y) = F_A(X) + \lambda F_A(Y)$. (linéarité de la trace et bilinéarité du produit matriciel.)
$\boxed{F_A \text{ est donc une forme linéaire sur } \mathcal{M}_n(\mathbf{C})}$
(ii) $\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})^2, \quad \forall \lambda \in \mathbf{C} \quad F_{A+\lambda B} = F_A + \lambda F_B$. (linéarité de la trace et bilinéarité du produit matriciel.) $\boxed{F \text{ est donc une application linéaire}}$
(iii) AE_{ij} est la matrice dont la $j$ème colonne est égale à la $i$ème colonne de A et dont toutes les autres colonnes sont nulles. Sa trace est donc égale à a_{ji}: $\boxed{F_A(E_{ij}) = a_{ji}}$
Si F_A est nulle, alors, pour tout (i,j), $a_{ji} = F_A(E_{ij}) = 0$. La matrice A est donc nulle, on en déduit que $\boxed{F \text{ est injective}}$
(iv) F est une application linéaire injective de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})^*$ et $\dim \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) = \dim \mathcal{M}_n(\mathbf{C})^* = n^2$.
$\boxed{F \text{ est donc un isomorphisme}}$

3. (i) F est un isomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})^*$ et $f \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})^*$. Il existe donc une unique matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ telle que $f = F_A$ c'est à dire $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C}), \quad f(X) = \operatorname{Tr}(AX)$.

(ii) $\psi_f(X)=0 \Leftrightarrow f(X)J=0 \Leftrightarrow f(X)=0$ (car $J\neq 0$). donc $\boxed{\operatorname{Ker}\psi_f = \operatorname{Ker} f}$
f est une forme linéaire non nulle et $J\neq 0$ donc
$\boxed{\text{l'image de } \psi_f \text{ est le sous-espace-vectoriel de } \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) \text{ enjendré par } J}$
$\boxed{\text{le rang de } \phi_f \text{ est égal à } 1}$
(iii) $\psi_f(J)=f(J)J=\operatorname{Tr}(AJ)J$.
Si $\operatorname{Tr}(AJ)=0$, alors $\psi_f(J)=0$ et $\operatorname{Im}\psi_f\subset\operatorname{Ker}\psi_f$ et d'après la question 1.(ii), $\operatorname{Tr}(\psi_f)=0=\operatorname{Tr}(AJ)$.
Si $\operatorname{Tr}(AJ)\neq 0$, alors $\psi_f(J)=\operatorname{Tr}(AJ)J$ et d'après le calcul fait dans la question 1.(iii), $\operatorname{Tr}(\psi_f)=\operatorname{Tr}(AJ)$.
Dans les deux cas: $\boxed{\operatorname{Tr}(\psi_f)=\operatorname{Tr}(AJ)}$

(iv) De la question 1.(iii), on déduit que $\boxed{\psi_f \text{ est diagonalisable si et seulement si } \operatorname{Tr}(AJ)\neq 0}$

(v) Dans le cas o ψ_f est diagonalisable, ses valeurs propres sont 0 et $\operatorname{Tr}(AJ)$ ($\operatorname{Tr}(AJ)\neq 0$).
Le polynme minimal de ψ_f est donc $\boxed{P_{\psi_f}(X)=X(X-\operatorname{Tr}(AJ))}$

Exercice 2

1. (i) On fait un développement limité en 0 du numérateur:
$\frac{1}{x^2}f(x)=\frac{\ln(\cos(x))}{x^2}=\frac{\ln(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2))}{x^2}=\frac{-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{x^2}=\frac{-1}{2}+o(1)$
donc $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}f(x)=-\frac{1}{2}}$

(ii) On sait alors qu'il existe un réel $\alpha>0$ tel que $\forall x\in]-\alpha,\alpha[,\quad |\frac{f(x)}{x^2}+\frac{1}{2}|\leq\frac{1}{4}$, c'est à dire
$\boxed{\forall x\in]-\alpha,\alpha[,\quad -\frac{3}{4}x^2\leq\ln(\cos x)\leq-\frac{1}{4}x^2}$

(iii) a. $\sum u_n^2$ converge, donc $\lim_{n\to\infty}u_n=0$ et $\lim_{n\to\infty}\cos u_n=1$.
$\boxed{\text{Il existe donc un entier naturel } n_0 \text{ tel que } \forall n\geq n_0,\quad \cos u_n>0}$

(iii) b. Comme $\lim_{n\to\infty}u_n=0$, on déduit de la question 1 que $-\ln(\cos u_n)\underset{n\to\infty}{\sim}\frac{u_n^2}{2}$, de plus $\sum_{n\geq n_0}-\ln(\cos u_n)$ et $\sum_{n\geq n_0}\frac{u_n^2}{2}$ sont des séries à termes positifs et $\sum\frac{u_n^2}{2}$ converge, donc $\boxed{\sum_{n\geq n_0}-\ln(\cos u_n)\text{ converge}}$

2. (i) $\beta\in]0,\frac{\pi}{2}[$ donc pour tout entier naturel i, $0<\cos\frac{\beta}{2^i}<1$.
On en déduit que $\mathbf{P}_\beta$ est une suite décroissante positive.
$\mathbf{P}_\beta$ est une suite décroissante positive, donc elle converge vers une limite $l_\beta\geq 0$.

(ii) On reprend la question 1.(iii) avec $u_n=\frac{\beta}{2^n}$ et $n_0=0$.
La suite de terme général u_n^2 converge et pour tout $n\geq 0$ on a $\cos u_n>0$.
On en déduit que la série $\sum_{n\geq 0}\ln(\cos u_n)$ converge vers un réel que l'on notera l.
La limite l_β de la suite $\mathbf{P}_\beta$ est alors égale à e^l.
On a donc bien $\boxed{l_\beta>0}$

3. (i) Π_0 est un carré de coté $\sqrt{2}$ et Π_1 est un octogone régulier.
(ii) a. OAC est un triangle isocelle de sommet O. Si M est le milieu de AC, alors OM est la hauteur du triangle associée à la base AC et l'aire du triangle est égale à $\frac{1}{2}OM.AC=OM.MA$.
Le triangle OAM est rectangle en M et l'angle du sommet O est égal à θ. On en déduit les relations : $\frac{OM}{OA}=\cos\theta$ et $\frac{MA}{OA}=\sin\theta$ avec $OA=1$.
finalement : $\boxed{\text{aire}(OAC)=OM.MA=\sin\theta\cos\theta}$

(ii) b. les triangles OMA et OAB ont la mme hauteur AM et ont pour bases respectives OM et OB.
On en déduit la relation $\dfrac{\text{aire}\,(OMA)}{\text{aire}\,(OAB)} = \dfrac{OM}{OB} = OM = \cos\theta$.
De plus $\text{aire}\,(OAC) = 2\,\text{aire}\,(OMA)$
donc $\text{aire}\,(OAC) = 2\cos\theta\,\text{aire}\,(OAB)$.
On en déduit aussi l'aire du triangle OAB: $\text{aire}\,(OAB) = \dfrac{\sin\theta}{2}$
(iii) Le polynme Π_n est formé de 2^{n+2} triangles semblables à OAB_n donc: $\text{aire}\,(\Pi_n) = 2^{n+2}\,\text{aire}\,(OAB_n)$.
(iv) De la question (ii), on déduit l'aire de OAB_n: $\text{aire}\,(OAB_n) = \dfrac{\sin\theta_n}{2} = \dfrac{\sin\frac{2\pi}{2^{n+2}}}{2}$
et l'aire de Π_n: $\text{aire}\,(\Pi_n) = 2^{n+2}\dfrac{\sin\frac{2\pi}{2^{n+2}}}{2}$
puis $\dfrac{\text{aire}\,(\Pi_{n+1})}{\text{aire}\,(\Pi_n)} = \dfrac{2^{n+3}\sin\frac{2\pi}{2^{n+3}}}{2^{n+2}\sin\frac{2\pi}{2^{n+2}}} = 2\dfrac{\sin\frac{\pi}{2^{n+2}}}{\sin\frac{2\pi}{2^{n+2}}} = 2\dfrac{\sin\frac{\pi}{2^{n+2}}}{2\sin\frac{\pi}{2^{n+2}}\cos\frac{\pi}{2^{n+2}}} = \dfrac{1}{\cos\frac{\pi}{2^{n+2}}}$
et $\boxed{\text{aire}\,(\Pi_n) = \cos(\frac{\pi}{2^{n+2}})\,\text{aire}\,(\Pi_{n+1})}$
(v) De la question précédente on déduit: $\prod_{k=0}^{n}\text{aire}\,(\Pi_k) = \prod_{k=0}^{n}\cos(\frac{\pi}{2^{k+2}})\prod_{k=0}^{n}\text{aire}\,(\Pi_{k+1})$ et après simplification:
$\text{aire}\,(\Pi_0) = \prod_{k=0}^{n}\cos(\frac{\pi}{2^{k+2}})\,\text{aire}\,(\Pi_{n+1})$
L'aire de Π_0 vaut 2 (carré de coté $\sqrt{2}$) et la limite de Π_n vaut π (cercle de rayon 1)
On en déduit $\boxed{l_{\frac{\pi}{4}} = \lim_{n\to\infty}\prod_{k=0}^{n}\cos(\frac{\pi}{2^{k+2}}) = \frac{2}{\pi}}$

Exercice 3

1. a) Equation de la droite (D_M) passant par le point M de coordonnées (α,β) et orthogonale à $\overrightarrow{OM}$: $\boxed{\alpha X + \beta Y = \alpha^2 + \beta^2}$

   b) Carré de la distance du point I de coordonnées $(a,0)$ à (D_M): $\boxed{\dfrac{(a\alpha - (\alpha^2+\beta^2))^2}{\alpha^2+\beta^2}}$

   c) (D_M) est tangente au cercle $\mathcal{C}$ si et seulement si la distance de I à (D_M) est égale à a, soit $\boxed{(a\alpha - (\alpha^2+\beta^2))^2 = a^2(\alpha^2+\beta^2)}$

2. Lorsque la condition précédente est remplie, la droite (D_M) est tangente au cercle et M est la projection orthogonale de O sur (D_M).
   Réciproquement, si (D) est une tangente à $\mathcal{C}$, et si on note M la projection orthogonale de O sur (D), alors $(D) = (D_M)$.
   (Γ) est donc l'ensemble des points M de coordonnées (α,β) tels que la condition du 1.c) soit vérifiée, d'o une équation cartésienne de (Γ): $\boxed{(aX - (X^2+Y^2))^2 = a^2(X^2+Y^2)}$
   En posant $X = r\cos\theta$ et $Y = r\sin\theta$ et en reportant dans la relation précédente on obtient $r = 0$ ou $r = a(1+\cos\theta)$ ou $r = a(-1+\cos\theta)$.
   Le changement de variable $\theta \mapsto \pi+\theta$ nous montre que les deux courbes paramétrées $r = a(1+\cos\theta)$ et $r = a(-1+\cos\theta)$ ont mme support. Elles contiennent l'origine $(r = 0)$.
   On en déduit une équation polaire de (Γ): $\boxed{r = a(1+\cos\theta)}$ (On reconnat une cardiode)

3.

4. a)

   b) On cherche à calculer l'aire de la surface définie par la relation

$$(*)\quad \left(\begin{array}{c} 0 \le r \le a(1+\cos\theta) \\ 0 \le r \le a(1+\cos(\theta - \frac{2\pi}{3})) \end{array}\right.$$

pour θ variant dans un intervalle de longueur 2π.
Etudions le signe de $a(1+\cos\theta) - a(1+\cos(\theta - \frac{2\pi}{3}))$:
$a(1+\cos\theta) - a(1+\cos(\theta - \frac{2\pi}{3})) = a(\cos\theta - \cos(\theta - \frac{2\pi}{3})) = -2a\sin(\frac{\pi}{3})\sin(\theta - \frac{\pi}{3})$.
On fait varier θ dans l'intervalle $[\frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}]$
Si $\theta \in [\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}]$ alors $a(1+\cos\theta) \leq a(1+\cos(\theta - \frac{2\pi}{3}))$ et $(*)$ est équivalente à $0 \leq r \leq a(1+\cos\theta)$.
Si $\theta \in [\frac{4\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}]$ alors $a(1+\cos\theta) \geq a(1+\cos(\theta - \frac{2\pi}{3}))$ et $(*)$ est équivalente à $0 \leq r \leq a(1+\cos(\theta - \frac{2\pi}{3}))$
L'aire recherchée est alors:
$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} \left(\int_0^{a(1+\cos\theta)} r\,dr \right) d\theta + \int_{\frac{4\pi}{3}}^{\frac{7\pi}{3}} \left(\int_0^{a(1+\cos(\theta - \frac{2\pi}{3}))} r\,dr \right) d\theta$$
On obtient une aire égale à $\boxed{a^2\left(\frac{3\pi}{2} - 2\sqrt{3}\right)}$