Corrigé du problème E3A MP 2003 épreuve A

Philippe PATTE (MP Lakanal) Jérôme FEHRENBACH

5 juin 2003

Première partie

1. On sait que $\forall t \in]$-1,1$[, \ln(1+t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} t^n$. Pour $x \in [0,1[$, on a donc

$$\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} = \frac{1}{2}(\ln(1+x) - \ln(1-x)) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}+1}{n}x^n = \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{x^{2p+1}}{2p+1}.$$

2. (a) Immédiat d'après la question précédente avec x_n dans $[0,1[$ pour $n \geq 1$.

   (b) On majore $\frac{1}{2p+1}$ par $\frac{1}{3}$ dans la relation de la question précédente. On obtient

$$v_n \leq \frac{1}{3}\sum_{p=1}^{+\infty} x^{2p} = \frac{1}{3}x_n^2\sum_{p=0}^{+\infty} x^{2p} = \frac{1}{3}\frac{x_n^2}{1-x_n^2} = \frac{1}{6n(n+1)} = \frac{1}{12n} - \frac{1}{12(n+1)}.$$

   (c) i. D'après I2a, $v_n = \ln U_n - \ln U_{n+1} > 0$ pour $n \geq 1$. Donc la suite $(\ln U_n)_{n\geq 1}$ est strictement décroissante.

   ii. L'inégalité du I2b s'écrit $\ln U_n - \frac{1}{12n} \leq \ln U_{n+1} - \frac{1}{12(n+1)}$ pour $n \geq 1$. Donc la suite $(\ln U_n - \frac{1}{12n})_{n\geq 1}$ est croissante.

3. Comme la suite $(\frac{1}{12n})_{n\geq 1}$ converge vers 0, les suites $(\ln U_n)_{n\geq 1}$ et $(\ln U_n - \frac{1}{12n})_{n\geq 1}$ sont adjacentes, donc convergent vers une même limite l. Par continuité de l'exponentielle, la suite $(U_n)_{n\geq 1}$ converge vers le réel strictement positif $\exp(l)$.

Deuxième partie

1. On note $a_n = \frac{n^{n-1}}{n!}$ le coefficient de x^n dans la série entière. D'après la formule de Stirling, $a_n \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\exp(n)}{n^{\frac{3}{2}}}$. Donc $|\frac{a_{n+1}}{a_n}|$ converge vers e et le rayon de convergence de la série entière vaut $\exp(-1)$.
2. En reprenant la question précédente, $a_n\exp(-n) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$. Avec des séries à termes positifs, on obtient la convergence de la série entière pour $x = \exp(-1)$.
3. On a donc la majoration de $|a_n x^n|$ sur $[-\exp(-1), \exp(-1)]$ par $a_n \exp(-n)$, indépendant de la variable x, terme général d'une série convergente. D'où la convergence normale et uniforme de la série entière définissant f sur $[-\exp(-1), \exp(-1)]$.
4. Comme le terme général de la série entière est continu sur $[-\exp(-1), \exp(-1)]$ et que la série entière converge uniformément sur $[-\exp(-1), \exp(-1)]$, f est continue sur $[-\exp(-1), \exp(-1)]$.

Troisième partie

1. On note $\theta(x) = \ln(1+x) - x$. la fonction θ est dérivable sur$]-1,+\infty($, de dérivée $\theta' = \frac{-x}{1+x}$. Sur $]0,\infty[$, $\theta' < 0$. Donc θ est strictement décroissante sur $[0,\infty[$. Comme $\theta(0) = 0$, la fonction θ est à valeurs strictement positives sur $]0,\infty($.

   Pour $n \geq 1$, on a donc $n\ln(1+\frac{1}{n}) < n$ et par stricte croissance de l'exponentielle, $(1+\frac{1}{n})^n <$ e.
2. La fonction f est somme d'une série entière de rayon de convergence $\exp(-1)$, donc est de classe C^∞ sur l'intervalle $]-\exp(-1), \exp(-1)[$ et ses dérivées se calculent par dérivation terme à terme.

   En particulier, sur $]-\exp(-1), \exp(-1)[$, $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^{n-1}}{(n-1)!}x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(n+1)^n}{n!}x^n$.

3. Sur l'intervalle $[0, \exp(-1)[$, $f'(x) > 0$.
Sur l'intervalle $]-\exp(-1), 0[$: en notant $\alpha_n = \frac{(n+1)^n}{n!}x^n$, on a

$$f'(x) = \lim_{p \longrightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{2p-1} \alpha_n = \lim_{p \longrightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{p-1} (\alpha_{2k} + \alpha_{2k+1}) = \sum_{k=0}^{+\infty} (\alpha_{2k} + \alpha_{2k+1}).$$

Or $\frac{|\alpha_{2k+1}|}{|\alpha_{2k}|} = (1 + \frac{1}{2k+1})^{2k+1}|x| < \mathrm{e}.\frac{1}{\mathrm{e}} = 1$. Donc $\alpha_{2k} + \alpha_{2k+1}$ est du signe de α_{2k}, i.e. strictement positif.
Finalement $f'(x) > 0$ sur tout l'intervalle $]-\exp(-1), \exp(-1)[$ et f est strictement croissante sur cet intervalle.

Quatrième partie

1. On note $b_n = (-1)^n \frac{n^{n-1}}{n!}(\frac{1}{\mathrm{e}})^n$ et $c_n = |b_n|$ de sorte que $A_N = \sum_{n=0}^{2N} b_n$ et $B_N = \sum_{n=0}^{2N+1} b_n$.
Pour $N \geq 1$, $A_{N+1} - A_N = b_{2N+1} + b_{2N+2} = c_{2N+2} - c_{2N+1}$ et $B_{N+1} - B_N = -c_{2N+3} - c_{2N+2}$.
Or $\frac{c_{n+1}}{c_n} = (1 + \frac{1}{n})^{n-1}\mathrm{e}^{-1} < (1 + \frac{1}{n})^n \mathrm{e}^{-1} < 1$. Donc la suite $(c_n)_{n \geq 1}$ est strictement décroissante et pour $N \geq 1$, $A_{N+1} - A_N < 0$ et $B_{N+1} - B_N > 0$. Donc la suite $(A_N)_{N \geq 1}$ est strictement décroissante et la suite $(B_N)_{N \geq 1}$ est strictement croissante. Comme $A_N - B_N = -b_{2N+1}$ converge vers 0 (car la série $\sum b_n$ converge), les suites $(A_N)_{N \geq 1}$ et $(B_N)_{N \geq 1}$ sont adjacentes.
2. La limite des suites $(A_N)_{N \geq 1}$ et $(B_N)_{N \geq 1}$ est $f(-\frac{1}{\mathrm{e}})$. Donc $B_N < f(-\frac{1}{\mathrm{e}}) < A_N$ pour tout $N \geq 1$.
3. $A_N - B_N = -b_{2N+1} = c_{2N+1}$ décroît vers 0. On calcule successivement $c_1, c_3, \dots$ jusqu'à obtenir un terme strictement inférieur à 10^{-2}. $c_{13} < 10^{-2}$.
4. Donc $\frac{1}{2}(A_6 + A_6)$ est une valeur approchée de $f(-\frac{1}{\mathrm{e}})$ à $0,5.10^{-2}$. On trouve donc $f(-\frac{1}{\mathrm{e}}) \approx -0,77$ à 10^{-2} près.

Cinquième partie

1. ϕ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ comme composée d'une fonction polynôme et de l'exponentielle. Par récurrence, on obtient le résultat demandé.
Le résultat est immédiat pour $i = 0$.
Soit i entre 0 et $m-1$. S'il existe un polynôme P_i tel que $\forall x \in \mathbb{R}, \phi^{(i)}(x) = P_i(\exp(x))(1 - \exp(x))^{m-i}$:
$\forall x \in \mathbb{R}, \phi^{(i+1)}(x) = \exp(x)P_i'(\exp(x))(1-\exp(x))^{m-i} - (m-i)\exp(x)P_i(\exp(x))(1-\exp(x))^{m-i}$, donc $\phi^{(i+1)}(x) = P_{i+1}(\exp(x))(1 - \exp(x))^{m-(i+1)}$ où P_{i+1} est le polynome $P_{i+1} = \mathrm{X}(1 - \mathrm{X})P_i' - (m-i)\mathrm{X}P_i$.
Donc pour tout i entre 0 et m, il existe un polynôme P_i tel que $\forall x \in \mathbb{R}, \phi^{(i)}(x) = P_i(\exp(x))(1 - \exp(x))^{m-i}$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$.
$\phi(x) = \sum_{n=0}^m \mathrm{C}_m^n (-1)^n \exp(nx) = \sum_{n=0}^m \mathrm{C}_m^n (-1)^n \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(nx)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} (\sum_{n=0}^m \mathrm{C}_m^n (-1)^n \frac{(n)^k}{k!})x^k$. Comme le développement en série entière est donné par la série de Taylor de ϕ, pour tout k dans $\mathbb{N}$,

$$\sum_{n=0}^m \mathrm{C}_m^n (-1)^n \frac{(n)^k}{k!} = \frac{\phi^k(0)}{k!}.$$

En particulier pour $k = m-1$. Or si $m \geq 2$, $\phi^{m-1}(0) = 0$ d'après la question précédente. Donc

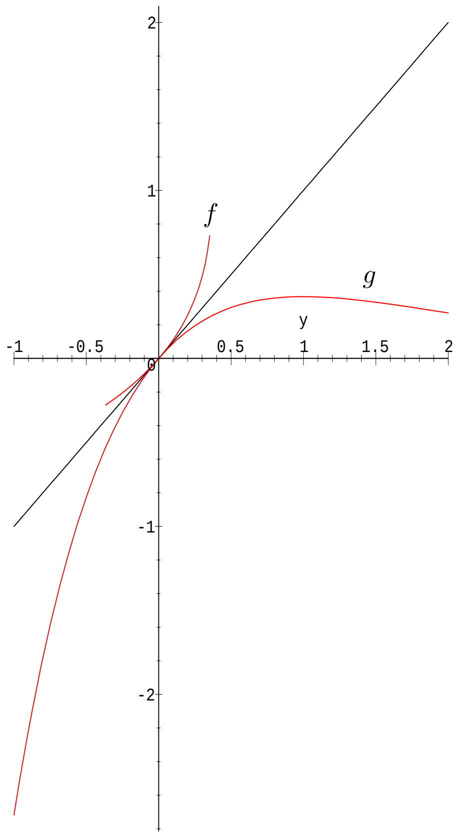
$$\sum_{n=0}^m \mathrm{C}_m^n (-1)^n n^{m-1} = \sum_{n=1}^m \mathrm{C}_m^n (-1)^n n^{m-1} = 0.$$

3. La fonction g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et $g'(y) = (1-y)\exp(-y)$. Donc g est strictement croissante sur $]-\infty, 1]$ et strictement décroissante sur $[1, +\infty[$. Elle tend vers 0 en $+\infty$ et vers $-\infty$ en $-\infty$ avec une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées. Le maximum, atteint en 1, vaut $\frac{1}{\mathrm{e}}$.
4. La fonction g est continue et strictement monotone sur $]-1, 0[$; $g(0) = 0$ et $g(-1) = -\mathrm{e}$. Comme $-\frac{1}{\mathrm{e}}$ est strictement entre $-\mathrm{e}$ et 0, il existe un unique $\alpha \in]-1, 0[$ tel que $g(\alpha) = -\frac{1}{\mathrm{e}}$.
Soit $y \in [\alpha, 1]$. Comme g est croissante sur $[\alpha, 1]$, $g(y) \in [g(\alpha), g(1)] = [-\frac{1}{\mathrm{e}}, \frac{1}{\mathrm{e}}]$.
5. Soit $y \in [\alpha, 1]$. Comme $g(y) \in [-\frac{1}{\mathrm{e}}, \frac{1}{\mathrm{e}}]$:
$f(y\exp(-y)) = f(g(y)) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{n-1}}{n!}(y\exp(-y))^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{n-1}}{n!} y^n \exp(-ny) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{n-1}}{n!} y^n (\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{n^k}{k!} y^k) = \sum_{n=1}^{+\infty} (\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{n^{n+k-1}}{n!k!} y^{n+k}) = \sum_{n=1}^{+\infty} (\sum_{m=n}^{+\infty} (-1)^{m-n} \frac{n^{m-1}}{n!(m-n)!} y^m)$.

6. Soit $y \in [\alpha, -\alpha]$. On étudie la suite double de terme général positif $|z_{n,m}|$. À n fixé, la série de terme général $|z_{n,m}|$ est convergente, de somme $s_n = \sum_{m=0}^{+\infty} |z_{n,m}| = \sum_{m=n}^{+\infty} \frac{n^{m-1}}{n!(m-n)!}|y|^m = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{n^{n+k-1}}{n!(k)!}|y|^{n+k} = \frac{n^{n-1}}{n!}|y|^n \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k)!}|ny|^k = \frac{n^{n-1}}{n!}|y|^n \exp(|ny|) = \frac{n^{n-1}}{n!}(|y| \exp(|y|))^n$. Comme $-|y| \in [\alpha, 0]$, $|y| \exp(|y|) = -g(-|y|) \in [-\frac{1}{\mathrm{e}}, \frac{1}{\mathrm{e}}]$. Or la série entière définissant f converge sur $[-\frac{1}{\mathrm{e}}, \frac{1}{\mathrm{e}}]$. Donc la série $\sum s_n$ converge. Donc la suite double $|z_{n,m}|$, et donc la suite double $z_{n,m}$, sont sommables.
7. Pour $y \in [\alpha, -\alpha]$, on peut donc permuter les deux $\sum$ dans l'égalité de la question 5 :

$$f(y \exp(-y)) = \sum_{n=1}^{+\infty}(\sum_{m=1}^{+\infty} z_{n,m} = \sum_{m=1}^{+\infty}(\sum_{n=1}^{+\infty} z_{n,m} = \sum_{m=1}^{+\infty}(\sum_{n=1}^{m}(-1)^{m-n}\frac{n^{m-1}}{n!(m-n)!}y^m) = \sum_{m=1}^{+\infty}(\frac{(-1)^m}{m!}\sum_{n=1}^{m}(-1)^n n^{m-1}\mathrm{C}_m^n)y^m.$$

   En reprenant l'égalité de la question 2, il ne reste que le terme $m = 1$. D'où l'égalité demandée.
8. Sur l'intervalle $[\alpha, 1]$, g est continue et strictement monotone et on a l'égalité $f(g(y)) = y$. La fonction f est donc la fonction réciproque de la restriction de g à $[\alpha, 1]$. On obtient sa courbe représentative par symétrie par rapport à la première bissectrice de la courbe représentative de la restriction de g à $[\alpha, 1]$.



9. La fonction g est dérivable en α et en 1, $g'(1) = 0$ et $g'(\alpha 1) \neq 0$. Donc f est dérivable en α mais pas en 1.