e3a concours

CONCOURS ENSAM - ESTP - ECRIN - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques 2 MP

durée 3 heures

L'utilisation de la calculatrice n'est pas autorisée

Exercice 1

On rappelle qu'une fonction f définie sur un intervalle $[c, d]$ de $\mathbb{R}$ est *affine* s'il existe des réels A, B tels que $\forall x \in [c, d]$, $f(x) = Ax + B$.

Soit $[a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$.

On note $\mathcal{C}([a, b])$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions *continues* sur $[a, b]$ à valeurs réelles.

Soit n un entier naturel non nul et soient $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n$ $(n+1)$ réels tels que :

$$a = a_0 < a_1 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b$$

Ils définissent une subdivision de l'intervalle $[a, b]$ en n intervalles $[a_i, a_{i+1}]$, $(0 \leq i < n)$.

On considère E le sous-ensemble de $\mathcal{C}([a, b])$ formé par les fonctions $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ dont les restrictions à chaque intervalle $[a_i, a_{i+1}]$ sont affines.

1°. *Des exemples de fonctions de E.*

(a) Soit i un entier tel que $0 \leq i \leq n$. On note φ_i la fonction définie sur $[a, b]$ par : $\forall x \in [a, b], \varphi_i(x) = |x - a_i|$. Montrer que φ_i est un élément de E.

(b) Soit i un entier tel que $0 \leq i \leq n$. Montrer qu'il existe un unique élément δ_i de E, vérifiant :

$$\delta_i(a_i) = 1 \text{ et pour tout} j \neq i,\ \delta_i(a_j) = 0.$$

2°. On pose $\mathcal{B} = (\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_n)$ et $\mathcal{C} = (\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, les fonctions φ_i et δ_i étant celles définies au **1°**.

(a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}([a, b])$.

(b) Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de E.

Tournez la page S.V.P.

(c) Montrer que $\mathcal{C}$ est une base de E (*indication :* Soient $\alpha_0, ..., \alpha_n$ des réels tels que $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i \varphi_i = 0$. On pourra étudier la fonction $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i \varphi_i$ au voisinage de a_j, pour $j \in \{0, ..., n\}$).

3°. *Un cas particulier.*

Soient $u, v, w \in \mathbb{R}$ tels que $u < v < w$. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une fonction continue nulle en dehors de $]u, w[$, affine sur $[u, v]$ et sur $[v, w]$ et telle que $g(v) = 1$; déterminer $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \alpha|x - u| + \beta|x - v| + \gamma|x - w|.$$

4°. *Retour au cas général.*

Soit $f \in E$. *On se propose d'exprimer formellement f sur la base $\mathcal{C}$*

(a) Déterminer la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$.

(b) Par quel calcul matriciel pourrait-on obtenir, une expression de f comme combinaison linéaire de $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$?

5°. Dans cette question on suppose la subdivision régulière, c'est à dire que pour tout i $(0 \leq i < n)$, on a : $a_{i+1} - a_i = (b - a)/n$.

(a) Expliciter alors la matrice P de la question 3° (a) et calculer son déterminant.

(b) Pour tout i $(0 < i < n)$, exprimer δ_i en fonction de φ_{i-1}, φ_i et φ_{i+1}.

(c) On note $C_0, C_1, ..., C_n$ les $(n+1)$ colonnes de la matrice P^{-1}. Expliciter $C_1, ..., C_{n-1}$.

(d) Finir le calcul de P^{-1}.

Exercice 2

On considère l'équation différentielle :

$$y''(x) - 3iy'(x) + (e^{ix} - 2)y(x) = 0 \qquad (\mathcal{E})$$

où y représente une fonction de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

1°. (a) Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation $(\mathcal{E})$ définies sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodiques forme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel que l'on notera $S_{2\pi}$.

(b) Etablir qu'une solution φ de l'équation $(\mathcal{E})$ est 2π-périodique si et seulement si :

$$\varphi(0) = \varphi(2\pi) \text{ et } \varphi'(0) = \varphi'(2\pi).$$

2°. (a) Soit f une solution 2π-périodique de l'équation $(\mathcal{E})$. Démontrer que la série de Fourier de f converge vers f en précisant le mode de convergence (on énoncera avec précision le théorème utilisé).

(b) Soit φ une solution 2π-périodique de l'équation $(\mathcal{E})$ définie par :

$$\varphi(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx}.$$

(i) Déterminer une relation de récurrence liant c_{k-1} et c_k.

(ii) En déduire que : $\forall k \leq 1,\ c_k = 0$.

(iii) Exprimer c_k en fonction de k et de c_2, pour tout $k \geq 2$.

3°. Démontrer que l'espace vectoriel $S_{2\pi}$ n'est pas réduit à la fonction nulle et déterminer sa dimension. Toutes les solutions de l'équation $(\mathcal{E})$ sont-elles 2π-périodiques?

4°. On considère la solution φ obtenue ci-dessus en posant $c_2 = 1$ et on note φ_1 sa partie réelle et φ_2 sa partie imaginaire $(\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2)$.

(a) Montrer que φ_1 et φ_2 sont respectivement paire et impaire.

(b) Montrer que $\varphi_1(0) > 0$.

(c) Etablir que φ_1 change de signe au moins quatre fois sur $[0, 2\pi[$ en déterminant (α, β, γ) tels que :

$$0 < \beta < \gamma < 2\pi \text{ et } \ \varphi_1(\alpha) < 0, \varphi_1(\beta) > 0, \varphi_1(\gamma) < 0.$$

Exercice 3

On considère la fonction réelle f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = xye^{-x-y}.$$

On munit $\mathbb{R}^2$ de sa structure usuelle de plan euclidien orienté. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on note Γ_λ la ligne de niveau λ de f, c'est à dire l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $f(x, y) = \lambda$.

1°. Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = xe^{-x}.$$

(a) Etudier les variations de la fonction φ et discuter selon la valeur de $\lambda \in \mathbb{R}$ le nombre de solutions de l'équation $\varphi(x) = \lambda$.

(b) Montrer que φ restreinte à $]-\infty, 0[$ définit un C^∞-difféomorphisme de $]-\infty, 0[$ sur lui-même.

2°. Déterminer les extremums de la fonction f (le cas échéant, on précisera la nature de l'extremum obtenu : maximum ou minimum, global ou local).

3°. (a) Montrer que par tout point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ passe une ligne de niveau Γ_λ et une seule.

(b) Déterminer dans le cas général un vecteur tangent à Γ_λ en (x_0, y_0) et préciser les exceptions.

(c) Etablir que toutes les courbes Γ_λ admettent un même axe de symétrie Δ que l'on précisera.

Pour tout $\lambda \neq 0$, on note Γ_λ^+ l'intersection de la courbe Γ_λ avec le demi-plan d'équation $x > 0$ et Γ_λ^- l'intersection de la courbe Γ_λ avec le demi-plan d'équation $x < 0$.

*On recommande de traiter la question **6°** au fur et à mesure de l'avancement des questions 4° et 5°.*

4°. Soit $\lambda > 0$.

(a) Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que Γ_λ^+ soit non vide.

(b) Montrer que, dans ce cas, Γ_λ^+ est une partie bornée de $\mathbb{R}^2$.

(c) Etablir que la courbe Γ_λ^- peut être caractérisée par une équation de la forme $y = g_\lambda(x)$ où g_λ est une fonction C^∞ sur $]-\infty, 0[$ dont on précisera les variations et les limites.

5°. Dans ce qui suit, on remplace la base canonique de $\mathbb{R}^2$ par la base $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et on note alors (X, Y) les nouvelles coordonnées du point (x, y).

(a) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, caractériser Γ_λ par une équation de la forme $F(X, Y) = \lambda$.

(b) On suppose $\lambda < 0$. Montrer que la branche Γ_λ^- de la courbe Γ_λ se caractérise par une équation de la forme $Y = G_\lambda(X)$ où G_λ est une fonction C^∞ dont on précisera les variations et les branches infinies (on utilisera la fonction φ définie en **1°**). Comment obtient-on l'autre branche Γ_λ^+?

(c) On suppose $\lambda > 0$. Caractériser la branche Γ_λ^+ par une équation de la forme $Y = \pm G_\lambda(X)$ où G_λ est une fonction dont on étudiera les variations à l'aide la fonction φ définie en **1°**.

6°. Indiquer sur un graphique l'allure des diverses lignes de niveau de la fonction f.