MATHÉMATIQUES

Problème

On désigne par E_0 le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ où a et b sont donnés avec $a<b$, muni de la norme :

$$\|f\| = \sup|f| = \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|.$$

On désigne par E_1 le sous–espace de E_0 des applications de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$.

Pour tout $f\in E_0$ on désigne par $L(f)$ la primitive de f qui vérifie $\displaystyle\int_a^b L(f)(t)\,\mathrm{d}t = 0.$

Pour tout entier non nul n on pose $L^n = L\circ L^{n-1}$ **où** $L_0 = \mathrm{id}$ **(application identique).**

On désigne par (P_n) la suite de polynômes définis par $P_0 = 1$ et $P_n = L^n(P_0)$ où l'on désigne par le même symbole le polynôme et la restriction de sa fonction polynômiale associée à $[a,b]$.

Partie I

1°. (a) Montrer que L est bien défini et constitue un endomorphisme de E_0.

(b) Déterminer son noyau Ker L.

(c) Montrer que l'image de L est incluse dans E_1. La restriction à E_1 de cet endomorphisme L définit–elle un automorphisme de E_1 (justifier avec précision la réponse) ?

2°. Soit $f \in E_0$.

(a) Démontrer l'égalité $\quad L(f)\,(t) = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b \left(\int_x^t f\,(u)\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x$ **pour tout t dans $[a,b]$.**

(b) Démontrer l'existence de deux réels x_i et x_s dans $[a,b]$ tels que, pour tout t dans $[a,b]$:

$$L(f)\,(x_i) \leqslant L(f)\,(t) \leqslant L(f)\,(x_s).$$

(c) Calculer la borne supérieure α de $\displaystyle\int_a^b |x-t|\,\mathrm{d}t$ **lorsque x décrit $[a,b]$. En déduire que** $\quad \|L(f)\| \leqslant \dfrac{b-a}{2}\,\|f\|$**. L'endomorphisme L est–il continu (justifier la réponse) ?**

(d) Calculer $\quad \|L(P_0)\| \quad$ **ainsi que** $\quad |\!|\!|L|\!|\!| = \sup\|L(f)\| \quad$ **lorsque f décrit la boule unité fermée de E_0 définie par** $\quad \|f\| \leqslant 1$.

Partie II

On désigne par F_1 le sous–ensemble de E_0 défini par les fonctions f telles que $\quad f\,(a+b-t) = \varepsilon\, f\,(t)$ **pour tout t dans $[a,b]$ avec $\varepsilon = -1$, et F_2 le sous–ensemble analogue avec $\varepsilon = +1$.**

On désigne par f_1 l'application $\quad t \mapsto \left(t - \dfrac{a+b}{2}\right)^2$ **et par f_2 l'application** $\quad t \mapsto (t-a)\,(t-b)$ **où t décrit $[a,b]$.**

1°. (a) Les ensembles F_1 et F_2 sont–ils vides ? réduits à $\{0\}$?

(b) Montrer que ce sont des sous–espaces vectoriels. Les comparer avec leurs images par L.

2°. Soit f un élément de E_0 et g la fonction définie sur $[a,b]$ par $\quad g(t) = \dfrac{1}{2}\Big[f\,(t) + f\,(a+b-t)\Big]$.

(a) Vérifier que g appartient à F_2.

(b) Démontrer la relation $\quad E = F_1 \oplus F_2$.

(c) Démontrer la relation $\quad L^n(f)\,(a) = L^n(f)\,(b) \quad$ **pour tout entier $n \geqslant 2$.**

3°. Soit f un élément de F_2.

(a) Démontrer les relations :

$$L^{2n-1}(f)\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0, \qquad L^{2n+1}(f)\,(a) = L^{2n+1}(f)\,(b) = 0$$

$$\text{et} \qquad \int_a^{\frac{a+b}{2}} L^{2n}(f)\,(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

lorsque n décrit N^*.

(b) On suppose désormais que $f\,(t) > 0$ **pour tout** t **dans** $[a, b]$**. Étudier les variations de** $L(f)$**,** $L^2(f)$**,** $L^3(f)$ **et** $L^4(f)$ **puis, plus généralement,** $L^n(f)$ **lorsque** n **décrit** N^***.**

(c) Calculer le cardinal de $\Omega_n = \{t \in [a, b] \mid L^n(f)\,(t) = 0\}$ **lorsque** n **décrit** N^***.**

(d) Déterminer le signe de $L^{2n}(f)\,(a)$ **lorsque** n **décrit** N^***.**

Partie III

1°. (a) Exprimer P_1**,** P_2 **et** P_3 **en fonction de la variable** $t - a$**.**

(b) Établir l'égalité $P_n(X + b - a) - P_n(X) = (b - a)\,\dfrac{(X - a)^{n-1}}{(n-1)!}$ **lorsque** n **décrit** N^***.**

(c) En déduire la valeur de la somme $S_2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$**.**

2°. Soit $\mathcal{P} = \mathbb{R}[X]$**. On définit sur** $\mathcal{P} \times \mathcal{P}$ **l'application :**

$$\varphi \;:\; (P, Q) \mapsto \varphi\,(P, Q) = \frac{1}{b - a} \int_a^b P(t)\,Q(t)\,\mathrm{d}t.$$

(a) Montrer que φ **est un produit scalaire.**

(b) Montrer que, si m **et** n **sont deux entiers vérifiant les relations** $m \geqslant n > 0$**, l'on dispose des égalités :**

$$\varphi\,(P_n, P_m) = (-1)^{n+1} P_{n+m}(a) \qquad \text{et} \qquad \varphi\,(P_n, P_0) = 0.$$

(c) Montrer que $P_n(a) = 0$ **si, et seulement si,** n **est impair et différent de 1.**

3°. On désigne respectivement par FP_1 **et** FP_2 **les sous–espaces vectoriels de** $\mathcal{P}$ **engendrés par les polynômes** P_n **d'indices pairs et impairs.**

(a) Démontrer la relation $\mathcal{P} = FP_1 \oplus FP_2$**.**

(b) Démontrer que cette somme directe est orthogonale pour le produit scalaire φ**.**

4°. On désigne par γ_n **le nombre** $\dfrac{n!}{(b-a)^n}\,P_n(a)$ **(ainsi** $\gamma_0 = 1$**).**

(a) Démontrer la relation $\gamma_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k \gamma_k$ **pour tout entier** n **supérieur ou égal à 2 et en déduire que** γ_n **est indépendant de** a **et de** b**.**

(b) Calculer γ_n **pour** $n \in \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 10\}$**.**

(c) Déterminer une base φ**–orthogonale du sous–espace** G **de** FP_2 **engendré par la famille** (P_0, P_2, P_4, P_6)**.**