Concours ENSAM - ESTP - ECRIN - ARCHIMEDE

CORRIGE DE L'EPREUVE DE MATHEMATIQUES 3

2001

PARTIE I

1°.(a) $L(f)$ est une primitive de f, il existe donc une constante C telle que pour tout $t \in [a,b]$: $L(f)(t) = \displaystyle\int_a^t f(u)\,du + C$.

La relation $\displaystyle\int_a^b L(f)(t)\,dt = 0$ permet de déterminer $C = -\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b \left(\int_a^x f(u)\,du\right)dx$

D'où $L(f)(t) = \displaystyle\int_a^t f(u)\,du - \frac{1}{b-a}\int_a^b \left(\int_a^x f(u)\,du\right)dx$

On montre facilement que $f \mapsto \displaystyle\int_a^t f(u)\,du - \frac{1}{b-a}\int_a^b \left(\int_a^x f(u)\,du\right)dx$ est une application linéaire de E_0 dans E_0, donc

$$\boxed{L \text{ est bien définie, C'est un endomorphisme de } E_0.}$$

1°.(b) Soit $f \in \ker L$, alors, $L(f) = 0$. En dérivant, on obtient $f = 0$.

$$\boxed{\ker L = \{0\}}$$

1°.(c) $L(f)$ est dérivable de dérivée f, donc $L(f)$ est de classe C^1:

$$\boxed{\operatorname{Im} L \subset E_1}$$

L'endomorphisme $\left|\begin{array}{ccc} E_1 & \to & E_1 \\ f & \mapsto & L(f) \end{array}\right.$ n'est pas surjectif car les éléments de son image sont de classe C^2.

$$\boxed{\text{La restriction de } L \text{ à } E_1 \text{n'est pas un automorphisme de } E_1.}$$

2°.(a) On repart de la formule trouvée en 1°.(a):

$$\begin{aligned}
L(f)(t) &= \int_a^t f(u)\,du - \frac{1}{b-a}\int_a^b \left(\int_a^x f(u)\,du\right)dx \\
&= \frac{1}{b-a}\int_a^b \left(\int_a^t f(u)\,du\right)dx - \frac{1}{b-a}\int_a^b \left(\int_a^x f(u)\,du\right)dx \\
&= \frac{1}{b-a}\int_a^b \left(\int_x^t f(u)\,du\right)dx
\end{aligned}$$

$$\boxed{L(f)(t) = \frac{1}{b-a}\int_a^b \left(\int_x^t f(u)\,du\right)dx}$$

2°.(b) $L(f)$ est continue sur le segment $[a,b]$, donc elle est bornée et atteind sa borne inf en un point $x_i \in [a,b]$ et sa borne sup en un point $x_s \in [a,b]$. Pour tout $t \in [a,b]$:

$$\boxed{L(f)(x_i) \leq L(f)(t) \leq L(f)(x_s).}$$

2°.(c)
$$\begin{aligned}
\int_a^b |x-t|\,dt &= \int_a^x (x-t)\,dt + \int_x^b (t-x)\,dt \\
&= x^2 - (a+b)x + \frac{a^2+b^2}{2}.
\end{aligned}$$

L'étude des variations de la fonction $x \mapsto x^2 - (a+b)x + \dfrac{a^2+b^2}{2}$ permet de montrer que sa borne supérieure est $\dfrac{(b-a)^2}{2}$, donc

$$\boxed{\sup_{t\in[a,b]} \int_a^b |t-x|\,dt = \frac{(b-a)^2}{2}.}$$

$$\begin{aligned}
|L(f)(t)| &= \left|\frac{1}{b-a}\int_a^b \left(\int_x^t f(u)\,du\right)\,dx\right| \\
&\le \frac{1}{b-a}\int_a^b \left|\int_x^t f(u)\,du\right|\,dx \\
&\le \frac{\|f\|}{b-a}\int_a^b |x-t|\,dx \\
&\le \frac{b-a}{2}\|f\|
\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{|L(f)(t)| \le \frac{b-a}{2}\|f\|}$$

Le théorème de continuité des applications linéaires permet de déduire de la relation $\|L(f)\| \le \dfrac{b-a}{2}\|f\|$ que

$$\boxed{L \text{ est continue sur } E_0.}$$

2°.(d) $L(P_0)(t) = t + C$ avec $\displaystyle\int_a^b (t+C)\,dt = 0$ donc $L(P_0)(t) = t - \dfrac{a+b}{2}$ et $\|L(P_0)\| = \dfrac{b-a}{2}$

De la relation $\|L(f)\| \le \dfrac{b-a}{2}\|f\|$, on déduit $|||L||| \le \dfrac{b-a}{2}$.

De la relation $\|L(P_0)\| = \dfrac{b-a}{2}$, on déduit $|||L||| \ge \dfrac{b-a}{2}$.

On a donc

$$\boxed{|||L||| = \frac{b-a}{2}}$$

PARTIE II

1°.(a) $F_1 = \{f \in E_0, \quad \forall t \in [a,b] \quad f(a+b-t) = -f(t)\}$

$F_2 = \{f \in E_0, \quad \forall t \in [a,b] \quad f(a+b-t) = f(t)\}$

L'application $f_1 : t \mapsto \left(t - \dfrac{a+b}{2}\right)^3$ est dans F_1 donc F_1 est non vide et non réduit à $\{0\}$.

L'application $f_2 : t \mapsto (t-a)(t-b)$ est dans F_2 donc F_2 est non vide et non réduit à $\{0\}$.

1°.(b) On voit facilement que F_1 et F_2 sont des sous-espaces vectoriels de E_0.

Soit $f \in F_1$. Il existe $C \in \mathbf{R}$ tel que $L(f)(t) = \displaystyle\int_{\frac{a+b}{2}}^t f(u)\,du + C \qquad (L(f)$primitive de $f)$

$$\begin{aligned}
\text{Alors, } L(f)(a+b-t) &= \int_{\frac{a+b}{2}}^{a+b-t} f(u)\,du + C \\
&= -\int_{\frac{a+b}{2}}^{t} f(a+b-v)\,dv + C \qquad (\text{changement de variable } v = a+b-u) \\
&= \int_{\frac{a+b}{2}}^{t} f(v)\,dv + C \qquad (\text{car } f \in F_1)
\end{aligned}$$

donc, si $f \in F_1$, alors $L(f) \in F_2$.

$$\boxed{L(F_1) \subset F_2}$$

Soit $f \in F_2$.

$$\begin{aligned}
\int_a^b \left(\int_{\frac{a+b}{2}}^t f(u)\,du\right)dt &= \int_a^b \left(\int_{\frac{a+b}{2}}^{a+b-x} f(u)\,du\right)dx \qquad (\text{changement de variable } t = a+b-x) \\
&= \int_a^b \left(-\int_{\frac{a+b}{2}}^{x} f(a+b-v)\,dv\right)dx \qquad (\text{changement de variable } u = a+b-v) \\
&= -\int_a^b \left(\int_{\frac{a+b}{2}}^{x} f(v)\,dv\right)dx \qquad (\text{car } f \in F_2)
\end{aligned}$$

On en déduit que si $f \in F_2$, alors, $\displaystyle\int_a^b \left(\int_{\frac{a+b}{2}}^t f(u)\,du\right) dt = 0$ et donc $L(f)(t) = \displaystyle\int_{\frac{a+b}{2}}^t f(u)\,du$.

On a alors

$$\begin{aligned} L(f)(a+b-t) &= \int_{\frac{a+b}{2}}^{a+b-t} f(u)\,du \\ &= -\int_{\frac{a+b}{2}}^{t} f(a+b-v)\,dv \qquad \text{(changement de variable } v = a+b-u) \\ &= -\int_{\frac{a+b}{2}}^{t} f(v)\,dv + C \qquad (\text{car } f \in F_2) \end{aligned}$$

Si $f \in F_2$, alors $L(f) \in F_1$.

$$\boxed{L(F_2) \subset F_1}$$

2°.(a) $\forall t \in [a,b]$, $g(a+b-t) = g(t)$ donc $g \in F_2$.

De la même façon, on définit la fonction h sur $[a,b]$ par $h(t) = \dfrac{1}{2}\left[f(t) - f(a+b-t)\right]$ et on vérifie que $h \in F_1$.

2°.(b) Soit $f \in E_0$, alors $f = h + g$ (notations du (a)) avec $h \in F_1$ et $g \in F_2$ donc $E_0 = F_1 + F_2$.
De plus $F_1 \cap F_2 = \{0\}$ donc

$$\boxed{E_0 = F_1 \oplus F_2}$$

2°.(c) Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

$$\begin{aligned} L^n(f)(b) - L^n(f)(a) &= \int_a^b \left(L^n(f)\right)'(t)\,dt \qquad (\text{car } L^n(f) \text{est } C^1) \\ &= \int_a^b L^{n-1}(f)(t)\,dt = 0 \qquad (\text{définition de } L) \end{aligned}$$

Donc, pour tout entier $n \geq 2$

$$\boxed{L^n(f)(b) = L^n(f)(a)}$$

3°.(a) $f \in F_2$, $L(F_1) \subset F_2$ et $L(F_2) \subset F_1$, pour tout entier $n \in \mathbf{N}^*$, $L^{2n-1}(f)$ est donc un élément de F_1.
On a alors $L^{2n-1}(f)\left(\dfrac{a+b}{2}\right) = -L^{2n-1}(f)\left(a+b-\dfrac{a+b}{2}\right) = -L^{2n-1}(f)\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$
donc pour $n \in \mathbf{N}^*$:

$$\boxed{L^{2n-1}(f)\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0}$$

De la même façon,
$L^{2n+1}(f)(a) = -L^{2n+1}(f)(a+b-a) = -L^{2n+1}(f)(b)$ or, on sait que $L^{2n+1}(f)(a) = L^{2n+1}(f)(b)$
donc pour $n \in \mathbf{N}^*$:

$$\boxed{L^{2n+1}(f)(a) = L^{2n+1}(f)(b) = 0}$$

$\displaystyle\int_a^{\frac{a+b}{2}} L^{2n}(f)(t)\,dt = \int_a^{\frac{a+b}{2}} \left(L^{2n+1}(f)\right)'(t)\,dt = L^{2n+1}(f)\left(\frac{a+b}{2}\right) - L^{2n+1}(f)(a) = 0.$ donc pour $n \in \mathbf{N}^*$:

$$\boxed{\int_a^{\frac{a+b}{2}} L^{2n}(f)(t)\,dt = 0}$$

3°.(b) $(L(f))' = f$ et f est strictement positive. On en déduit les variations de $L(f)$.

t	a		$\frac{a+b}{2}$		b
$L(f)(t)$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	

$(L^2(f))' = L(f)$, de plus, on sait que la moyenne de $L^2(f)$ sur [a,b] est nulle, $L^2(f)$ s'annule donc en deux points que l'on notera c_2 et d_2. On en déduit les variations de $L^2(f)$.

$(L^3(f))' = L^2(f)$, de plus $L^3(f)$ s'annule en a, b, et $\dfrac{a+b}{2}$. On en déduit les variations de $L^3(f)$.

t	a		c_2		$\frac{a+b}{2}$		d_2		b
$L^2(f)(t)$	$L^2(f)(a)$	$\searrow$	0	$\searrow$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	$L^2(f)(a)$
$L^3(f)(t)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0	$\searrow$		$\nearrow$	0

De même, on obtient les variations de $L^4(f)$ et de $L^5(f)$:

t	a		c_4		$\frac{a+b}{2}$		d_4		b
$L^4(f)(t)$	$L^4(f)(a)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0	$\searrow$	$L^4(f)(a)$
$L^5(f)(t)$	0	$\searrow$		$\nearrow$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

Par récurrence, on peut déterminer les variations de $L^n(f)$ lorsque n décrit $\mathbf{N}^*$:
Variations de $L^{4p}(f)$ et de $L^{4p+1}(f)$, $p \in \mathbf{N}^*$:

t	a		c_{4p}		$\frac{a+b}{2}$		d_{4p}		b
$L^{4p}(f)(t)$	$L^{4p}(f)(a)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0	$\searrow$	$L^{4p}(f)(a)$
$L^{4p+1}(f)(t)$	0	$\searrow$		$\nearrow$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

Variations de $L^{4p+2}(f)$ et de $L^{4p+3}(f)$, $p \in \mathbf{N}$:

t	a		c_{4p+2}		$\frac{a+b}{2}$		d_{4p+2}		b
$L^{4p+2}(f)(t)$	$L^{4p+2}(f)(a)$	$\searrow$	0	$\searrow$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	$L^{4p+2}(f)(a)$
$L^{4p+3}(f)(t)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0	$\searrow$		$\nearrow$	0

3°.(c) $\Omega_n = \{t \in [a,b] | L^n(f)(t) = 0\}$
Des tableaux de variation de la question précédente, on déduit que:
pour $n = 1$, le cardinal de Ω_1 est 1, pour n pair, le cardinal de Ω_n est 2, pour $n \geq 3$ impair, le cardinal de Ω_n est 3.

3°.(d) De même,
pour $n = 1$, $L(f)(a) < 0$,
pour $n \geq 3$ impair, $L^n(f)(a) = 0$,
pour n congru à 2 modulo 4, $L^n(f)(a) > 0$,
pour n multiple de 4, $L^n(f)(a) < 0$.

PARTIE III

1°.(a) $P_0(t) = 1$

$$P_1(t) = (t-a) - \frac{b-a}{2}$$

$$P_2(t) = \frac{(t-a)^2}{2} - \frac{(b-a)(t-a)}{2} + \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$P_3(t) = \frac{(t-a)^3}{6} - \frac{(b-a)(t-a)^2}{4} + \frac{(b-a)^2(t-a)}{12}$$

1°.(b) Montrons l'égalité $P_n(X+b-a) - P_n(X) = (b-a)\dfrac{(X-a)^{n-1}}{(n-1)!}$ par récurrence sur n.

Pour $n = 1$, on a bien $P_1(X+b-a) - P_1(X) = (b-a)$

Supposons que pour un entier $n \in \mathbf{N}^*$ on ait $P_n(X+b-a) - P_n(X) = (b-a)\dfrac{(X-a)^{n-1}}{(n-1)!}$.

La dérivée de P_{n+1} est P_n, donc le polynôme $P_{n+1}(X+b-a) - P_{n+1}(X) - (b-a)\dfrac{(X-a)^n}{n!}$ a pour dérivée $P_n(X+b-a) - P_n(X) - (b-a)\dfrac{(X-a)^{n-1}}{(n-1)!}$, qui est nulle d'après l'hypothèse de récurrence.

De plus, sa valeur en a est $P_{n+1}(b) - P_{n+1}(a)$ qui est nulle d'après la question II 2°(c).

On en déduit que le polynôme $P_{n+1}(X+b-a) - P_{n+1}(X) - (b-a)\dfrac{(X-a)^n}{n!}$ est nul, d'où la relation à l'ordre $n+1$.

D'après le principe de récurrence, on a montré que

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N}^* \quad P_n(X+b-a) - P_n(X) = (b-a)\frac{(X-a)^{n-1}}{(n-1)!}.}$$

1°.(c) Dans la relation précédente, on pose $a=0$, $b=1$, $n=3$ et $X=k$.

On obtient $P_3(k+1) - P_3(k) = \dfrac{k^2}{2}$

On somme alors pour k variant de 1 à n et on trouve $P_3(n+1) - P_3(1) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$.

Or $P_3(t) = \dfrac{t^3}{6} - \dfrac{t^2}{4} + \dfrac{t}{12}$ d'où finalement

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.}$$

2°.(a) $\varphi(P,Q) = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b P(t)Q(t)\,dt$

φ est une application de $\mathcal{P} \times \mathcal{P}$ dans $\mathbf{R}$.

On vérifie facilement que φ est bilinéaire et symétrique.

Pour tout $P \in \mathcal{P}$, $\varphi(P,P) \geq 0$ et si $\varphi(P,P) = 0$, alors $P = 0$ donc φ est définie positive.

$$\boxed{\varphi \text{ est bien un produit scalaire de } \mathcal{P}}$$

2°.(b) Intégrons $\varphi(P_n, P_m)$ par parties:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b P_n(t)P_m(t)\,dt = \frac{1}{b-a}\left([P_n(t)P_{m+1}(t)]_a^b - \int_a^b P_{n-1}(t)P_{m+1}(t)\,dt \right) \begin{pmatrix} u = P_n & v' = P_m \\ u' = P_{n-1} & v = P_{m+1} \end{pmatrix}$$

or, on sait d'après II 2°.(c) que pour $k \geq 2$, $P_k(a) = P_k(b)$ donc pour $m \geq n \geq 2$, on a $\varphi(P_n, P_m) = -\varphi(P_{n-1}, P_{m+1})$.

On montre alors par récurrence que

$$\varphi(P_n, P_m) = (-1)^{n+1}\varphi(P_{m+n-1}, P_1) = \frac{(-1)^{n+1}}{b-a}\int_a^b P_{m+n-1}(t)P_1(t)\,dt$$

Puis $\dfrac{(-1)^{n+1}}{b-a}\displaystyle\int_a^b P_{m+n-1}(t)P_1(t)\,dt$

$= \dfrac{(-1)^{n+1}}{b-a}\left([P_{m+n}(t)P_1(t)]_a^b - \displaystyle\int_a^b P_{m+n}(t)\,dt \right)$ (on intègre par parties: $\begin{pmatrix} u = P_1 & v' = P_{m+n-1} \\ u' = 1 & v = P_{m+n} \end{pmatrix}$)

$= \dfrac{(-1)^{n+1}}{b-a}\left(P_{m+n}(b)P_1(b) - P_{m+n}(a)P_1(a)\right)$ (car $\displaystyle\int_a^b P_{m+n}(t)\,dt = 0$ par définition de L)

$= \dfrac{(-1)^{n+1}}{b-a}\left(P_{m+n}(a)(b-a)\right)$ (car $P_{m+n}(a) = P_{m+n}(b)$ et $P_1(b) - P_1(a) = b-a$)

On obtient bien pour $m \geq n > 0$

$$\boxed{\varphi(P_n, P_m) = (-1)^{n+1}P_{m+n}(a)}$$

$\varphi(P_n, P_0) = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b P_n(t)\,dt = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b L(P_{n-1})(t)\,dt = 0$ d'après la définition de L.

2°.(c) $P_n(a) = L^n(P_0)(a)$ et P_0 est un élément de F_2 tel que pour tout $t \in [a,b]$, $P_0(t) > 0$. En utilisant le résultat trouvé en II 3°.(d), on montre que

$$\boxed{P_n(a)=0 \text{ si et seulement si } n \text{ est impair et différent de 1.}}$$

3°.(a) Pout tout entier n, le polynôme P_n est de degré n, $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est donc une base de $\mathcal{P}$.

On en déduit que les espaces $FP_1 = \mathrm{Vect}\{P_n, n \in 2\mathbf{N}+1\}$ et $FP_2 = \mathrm{Vect}\{P_n, n \in 2\mathbf{N}\}$ sont deux espaces supplémentaires:

$$\boxed{\mathcal{P} = FP_1 \oplus FP_2.}$$

3°.(b) Si n est un entier pair et si m est un entier impair, montrons que $\varphi(P_n, P_m) = 0$.

Si $n = 0$, c'est vrai (III 2)(b).

Si $0 < n \leq m$, $\varphi(P_n, P_m) = (-1)^{n+1}P_{m+n}(a) = 0$. (d'après III 2) (b) et III 2) (c)

$$\boxed{\text{La somme directe } FP_1 \oplus FP_2 \text{ est donc bien orthogonale pour le produit scalaire } \varphi}$$

.

4°.(a) Montrons par récurence que $P_n(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \gamma_k \frac{(t-a)^{n-k}}{(n-k)!}\frac{(b-a)^k}{k!}$

Pour $n = 0$ la formule est vraie.

Supposons que $P_n(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \gamma_k \frac{(t-a)^{n-k}}{(n-k)!}\frac{(b-a)^k}{k!}$

P_{n+1} est une primitive de P_n donc

$$P_{n+1}(t) = \int_a^t P_n(u)\,du + P_{n+1}(a) = \int_a^t P_n(u)\,du + \gamma_{n+1}\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \gamma_k \frac{(t-a)^{n+1-k}}{(n+1-k)!}\frac{b-a)^k}{k!} + \gamma_{n+1}\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \gamma_k \frac{(t-a)^{n+1-k}}{(n+1-k)!}\frac{b-a)^k}{k!}$$

On obtient la relation à l'ordre $n+1$.

D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $P_n(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \gamma_k \frac{(t-a)^{n-k}}{(n-k)!}\frac{b-a)^k}{k!}$

On pose ensuite $t = b$: $P_n(b) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \gamma_k \frac{(b-a)^n}{(n-k)!k!} = \frac{(b-a)^n}{n!}\sum_{k=0}^{n} C_n^k \gamma_k$

Or pour $n \geq 2$, $P_n(b) = P_n(a) = \dfrac{(b-a)^n}{n!}\gamma_n$

On en déduit la relation demandée pour $n \geq 2$:

$$\boxed{\gamma_n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \gamma_k}$$

On peut alors déterminer une formule de récurrence permettant de calculer les γ_n:

$\gamma_0 = 1$ et pour $n \geq 2$, $\gamma_{n-1} = \dfrac{-1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-2} C_n^k \gamma_k$.

On en déduit que γ_n est indépendant de a et b.

4°.(b) $\gamma_1 = \dfrac{-1}{2}$; $\gamma_2 = \dfrac{1}{6}$; $\gamma_3 = 0$; $\gamma_4 = \dfrac{-1}{30}$; $\gamma_6 = \dfrac{1}{42}$; $\gamma_8 = \dfrac{-1}{30}$; $\gamma_{10} = \dfrac{5}{66}$;

4°.(c) On utilise le procédé d'orthogonalisation de Schmidt en calculant les produits scalaires avec les relations de la question III 2°.(b). $\varphi(P_n, P_0) = 0$ et pour $m \geq n > 0$, $\varphi(P_n, P_m) = (-1)^{n+1}P_{m+n}(a) = (-1)^{n+1}\dfrac{(b-a)^{m+n}}{(m+n)!}\gamma_{m+n}$

On obtient comme base $\varphi-$orthogonale du sous espace G de FP_2 engendré par la famille (P_0, P_2, P_4, P_6):

$$\boxed{(P_0, P_2, P_4 + (b-a)^2\frac{P_2}{42}, P_6 + (b-a)^2\frac{P_4}{33} + (b-a)^4\frac{P_2}{7920}}$$