E 3 A, MP, 2001, Mathématiques II

(6 pages)

Exercice 1

1°. $\diamond$ $\mathcal{L}(E)$ étant une algèbre, on a directement $\underline{u^+ \in \mathcal{L}(E)}$.

$\diamond$ Soit $h \in G$. L' application $\delta_h : g \longmapsto gh$ est une bijection de G dans G. On peut donc écrire :

$$u^+ h = \left(\frac{1}{m}\sum_{g\in G} g^{-1}\,u\,g\right) h = \frac{1}{m}\sum_{g\in G} g^{-1}\,u\,g\,h = \frac{1}{m}\sum_{g\in G} h\,h^{-1}g^{-1}\,u\,gh = \frac{1}{m}\sum_{g\in G} h\,\big(\delta_h(g)\big)^{-1}\,u\,\big(\delta_h(g)\big)$$

$$= h\,\left(\frac{1}{m}\sum_{g\in G} \big(\delta_h(g)\big)^{-1}\,u\,\delta_h(g)\right) = h\,\left(\frac{1}{m}\sum_{g'\in G} g'^{-1}\,u\,g'\right) = hu^+ \qquad \text{en posant } g' = \delta_h(g)$$

donc $\underline{\forall h \in G, \quad u^+ h = hu^+}$.

2°. Ainsi, $(u^+)^+ = \frac{1}{m}\sum\limits_{g\in G} g^{-1}\,u^+\,g = \frac{1}{m}\sum\limits_{g\in G} g^{-1}\,g\,u^+ = \frac{1}{m}\sum\limits_{g\in G} u^+ = \frac{1}{m}\,m\,u^+$ soit $\underline{(u^+)^+ = u^+}$.

3°. On a $\forall g \in G,\ \mathrm{Tr}\big(g^{-1}\,u\,g\big) = \mathrm{Tr}(u)$ donc, par linéarité de la trace $\underline{\mathrm{Tr}(u^+) = \mathrm{Tr}(u)}$.

4°. Soit $x \in F = \mathrm{Im}\,p$, on a donc $p^+(x) = \frac{1}{m}\sum\limits_{g\in G} g^{-1}\,p\,g(x)$. Or, pour tout $g \in G$, F est stable par G donc $g(x) \in F = \mathrm{Im}\,p$ et donc $p\big(g(x)\big) = g(x)$. Ainsi, $p^+(x) = \frac{1}{m}\sum\limits_{g\in G} g^{-1}g(x) = \frac{1}{m}\sum\limits_{g\in G} x = x$ donc $x \in \mathrm{Im}\,p^+$.
Donc $\underline{F \subset \mathrm{Im}\,p^+}$.

5°. D'après [**4**], $\forall y \in F,\ g^{-1}\,p\,g(y) = y$. Or $\forall x \in E,\ p\,h(x) \in \mathrm{Im}\,p = F$ donc $h^{-1}\,p\,h(x) \in F$ car F est stable par $h^{-1} \in G$. On a, par conséquent, $\forall x \in E,\ g^{-1}\,p\,g\big(h^{-1}\,p\,h(x)\big) = h^{-1}\,p\,h(x)$ donc $\underline{g^{-1}\,p\,g\,h^{-1}\,p\,h = h^{-1}\,p\,h}$.

6°. On a

$$\big(p^+\big)^2 = \left(\frac{1}{m}\sum_{g\in G} g^{-1}\,p\,g\right)\left(\frac{1}{m}\sum_{h\in G} h^{-1}\,p\,h\right) = \frac{1}{m^2}\sum_{g\in G}\sum_{h\in G} g^{-1}\,p\,g\,h^{-1}\,p\,h$$
$$= \frac{1}{m^2}\sum_{g\in G}\sum_{h\in G} h^{-1}\,p\,h \qquad \text{d'après [\textbf{5}]}$$
$$= \frac{1}{m^2}\sum_{g\in G} m\,p^+ = \frac{1}{m^2}\,m^2\,p^+ = p^+$$

donc $\underline{p^+ \text{ est un projecteur}}$.

7°. On a vu en [**5**] que, pour tout $x \in E$ et tout $h \in G$, $h^{-1}\,p\,h(x) \in F$ donc $p^+(x) = \frac{1}{m}\sum\limits_{h\in G} h^{-1}\,p\,h(x) \in F$ donc $\mathrm{Im}\,p^+ \subset F$ et, avec le résultat de [**4**], $\underline{\mathrm{Im}\,p^+ = F = \mathrm{Im}\,p}$.
On peut aussi utiliser le fait que, puisque p^+ est un projecteur, on a $\mathrm{rg}\,p^+ = \mathrm{Tr}(p^+)$. Or, [**3**] donne $\mathrm{Tr}(p^+) = \mathrm{Tr}(p) = \mathrm{rg}\,p$ donc $\mathrm{rg}\,p^+ = \mathrm{rg}\,p$ et l'inclusion de [**4**] donne l'égalité voulue.

8°. $\diamond$ Puisque p^+ est un projecteur, $\underline{\operatorname{Ker} p^+ \text{ est un supplémentaire de } F = \operatorname{Im} p^+}$.

$\diamond$ Pour tout $g \in G$, g et p^+ commutent d'après [**1**], donc $\underline{\operatorname{Ker} p^+ \text{ est stable par } g}$.

9°. Si F est stable par tout $g \in G$, il suffit de choisir un projecteur d'image F (qui existe car F admet des supplémentaires) et d'appliquer [**8**].
Tout sous-espace stable par tout $g \in G$ admet au moins un supplémentaire stable par tout $g \in G$.

Exercice 2

1°. Munissons $\mathbb{R}^2$ de son produit scalaire canonique et posons $\vec{V} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, $\vec{E} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{E'} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
L'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit $\left|(\vec{V} \mid \vec{E})\right| \leqslant \|\vec{V}\|\,\|\vec{E}\|$ et $\left|(\vec{V} \mid \vec{E'})\right| \leqslant \|\vec{V}\|\|\vec{E'}\|$ ce qui donne le résultat : $\underline{|u+v| \leqslant \rho\sqrt{2} \quad \text{et} \quad |u-v| \leqslant \rho\sqrt{2}}$.

2°. • **Méthode 1 :**
On a $D(u,v) = 2\big(u^2+v^2+2u+2v+2\big) = 2\,\rho^2 + 4(u+v) + 4 \geqslant 2\,\rho^2 - 4\sqrt{2}\,\rho + 4 = \varphi(\rho)$ d'après [**1**] et $\varphi'(\rho) = 4\big(\rho - \sqrt{2}\big) < 0$ pour $\rho \in]0,1]$ donc $\forall \rho \in]0,1]$, $\quad \varphi(\rho) \geqslant \varphi(1) = 6 - 4\sqrt{2}$. Or

$$6 - 4\sqrt{2} - \frac{1}{3} = \frac{17 - 12\sqrt{2}}{3} = \frac{(17)^2 - (12\sqrt{2})^2}{3\big(17+12\sqrt{2}\big)} = \frac{289 - 288}{3\big(17+12\sqrt{2}\big)} > 0$$

donc $\underline{\text{pour tout } (u,v) \text{ tel que } 0 < \sqrt{u^2+v^2} \leqslant 1, \quad 3D(u,v) > 1}$.

• **Méthode 2 :**
$\dfrac{\partial D}{\partial u}(u,v) = 4(u+1)$, $\dfrac{\partial D}{\partial v}(u,v) = 4(v+1)$ donc D n'a pas de point critique dans la boule ouverte $B_o(\vec{0},1)$ et donc les extremums de D sur le compact $B_f(\vec{0},1)$ sont atteints sur le cercle $\rho = 1$. Et on a $D(\cos t, \sin t) = 6 + 4\big(\cos t + \sin t\big) = 6 + 2\sqrt{2}\cos\big(t - \frac{\pi}{4}\big)$ dont le minimum vaut $6 - 2\sqrt{2}$ et on conclut comme ci-dessus.

4°. $\left|N(u,v)\right| \leqslant \left|u^2 - v^2\right| \left(u^2+v^2\right) + 4\left|uv\right|\left|u-v\right| \leqslant \left(u^2+v^2\right)^2 + 4\left|uv\right|\left|u-v\right|$. Or, $2\left|uv\right| \leqslant u^2+v^2$ et, d'après [**1**], $\left|u-v\right| \leqslant \rho\sqrt{2}$, donc $\underline{\left|N(u,v)\right| \leqslant \rho^4 + 2\sqrt{2}\,\rho^3}$.

5°.
$$\begin{aligned}
g(u,v) &= \frac{(1+u)^2 - (1+v)^2}{(1+u)^2 + (1+v)^2} - (u-v) - \frac{v^2-u^2}{2} \\
&= \frac{2\,(1+u)^2 - 2\,(1+v)^2 - 2\,(u-v)\left[(1+u)^2+(1+v)^2\right] + (u^2-v^2)\left[(1+u)^2+(1+v)^2\right]}{D(u,v)} \\
&= \frac{2\,(u-v)\left[(u+v+2) - (1+u)^2 - (1+v)^2\right] + (u^2-v^2)\left[u^2+v^2\right] + (u^2-v^2)\left[2u+2v+2\right]}{D(u,v)} \\
&= \frac{2\,(u-v)\left[-u^2-v^2-u-v\right] + (u^2-v^2)\left[u^2+v^2\right] + 2\,(u-v)\,(u+v)\left[u+v+1\right]}{D(u,v)} \\
&= \frac{2\,(u-v)\left[-u^2-v^2-u-v+(u+v)^2+(u+v)\right] + (u^2-v^2)\left[u^2+v^2\right]}{D(u,v)} \\
&= \frac{N(u,v)}{D(u,v)}
\end{aligned}$$

donc $\left|g(u,v)\right| = \dfrac{\left|N(u,v)\right|}{\left|D(u,v)\right|} \leqslant 3\left[\rho^4 + 2\sqrt{2}\,\rho^3\right] \leqslant 3\,\rho^3\left[\rho + 2\sqrt{2}\right] \leqslant 3\,\rho^3\left[1+2\sqrt{2}\right]$ donc $\underline{\dfrac{\left|g(u,v)\right|}{\rho^3} \leqslant 12}$.

5°. Un calcul simple conduit à $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4\,\dfrac{xy^2}{(x^2+y^2)^2}, \quad \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -4\,\dfrac{x^2y}{(x^2+y^2)^2}$.

6°. De même, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 4\,\dfrac{y^2(y^2-3x^2)}{(x^2+y^2)^3}, \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 4\,\dfrac{x^2(3y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^3}, \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 8\,\dfrac{xy(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3}$.

7°. En particulier, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 1,\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1) = -1,\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) = -1,\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1) = 1,\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1) = 0$ donc

$$g(u,v) = f\big(1+u,1+v\big) - \mathrm{d}f(1,1)\big[(u,v)\big] - \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1)\,u^2 + 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1)\,uv + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1)\,v^2\right]$$

est le reste de la formule de Taylor à l'ordre 2.
Le résultat de [**4**] peut s'écrire $g(u,v) = O(\rho^3)$ quand $(u,v) \longrightarrow (0,0)$, résultat meilleur que le résultat général où on a seulement $g(u,v) = o(\rho^2)$ quand $(u,v) \longrightarrow (0,0)$.

8°. Posons $h(x,y,z) = f(x,y) - z$, le plan tangent à la surface d'équation $h(x,y,z) = 0$ en (x,y,z) est normal au vecteur $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,h(x,y,z)$ et, par définition, l'angle (non orienté) de deux plans de $\mathbb{R}^3$ est égal à l'angle entre deux vecteurs normaux à ces plans. En notant $\vec{k} = (0,0,1)$, on a donc $\cos\theta = \dfrac{|\vec{k}.\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,h(x,y,z)|}{\|\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,h(x,y,z)\|}$.
Comme $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,h(x,y,z) = \left(4\,\dfrac{xy^2}{(x^2+y^2)^2}, -4\,\dfrac{x^2y}{(x^2+y^2)^2}, -1\right)$, on a

$$\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \qquad \text{et} \qquad \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta} - 1 = 16x^2y^2\,\frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^4} + 1 - 1$$

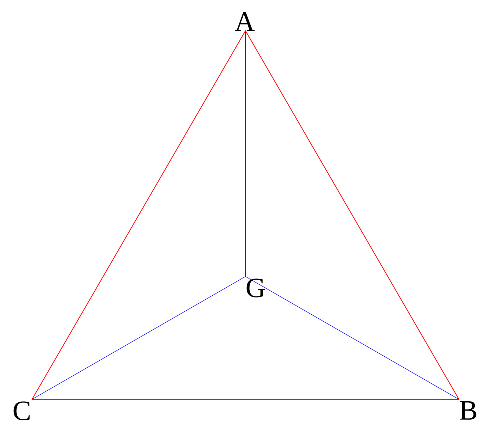
donc $\tan\theta = 4\,\dfrac{|xy|}{(x^2+y^2)^{3/2}}$.

9°. Soit $\vec{u}(\alpha)$ un vecteur unitaire directeur de la demi-droite parcourue par le point mobile. On peut écrire ce point sous la forme $M(t) = 0 + t\,\vec{u}(\alpha)$ avec $t \in]0,+\infty[$, soit $M(t) = \big(t\,\cos\alpha, t\,\sin\alpha, 0\big)$ et le point correspondant sur la surface est $P(t) = \big(t\,\cos\alpha, t\,\sin\alpha, \cos(2\alpha)\big)$ car $f\big(t\cos\alpha, t\sin\alpha\big) = \cos(2\alpha)$. Donc, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, le plan Π_t tangent à la surface en $P(t)$ contient la droite Δ de vecteur directeur $\vec{u}(\alpha)$ passant par $\big(0,0,\cos(2\alpha)\big)$.

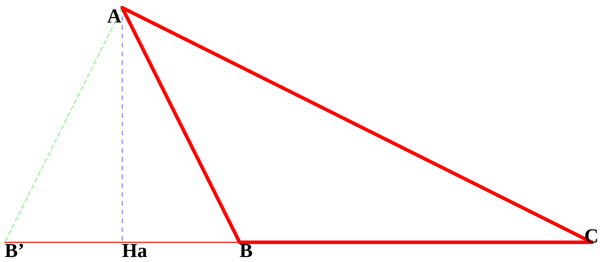
Π_t est l'image du plan $z = \cos(2\alpha)$ par la rotation d'axe Δ et d'angle $\theta(t) = \mathrm{Arctan}\left(2\,\dfrac{|\sin(2\alpha)|}{t}\right)$.
On remarque que $t \longmapsto \theta(t)$ est décroissante sur $]0,+\infty[$ avec $\lim_{t\to 0^+}\theta(t) = \frac{\pi}{2}$ et $\lim_{t\to+\infty}\theta(t) = 0$.

Exercice 3

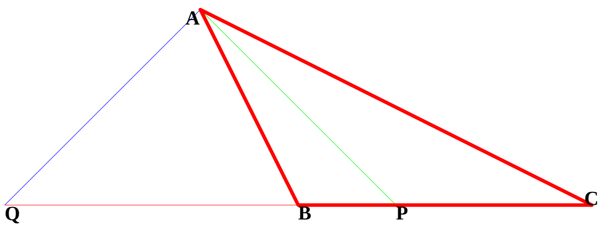
1°. Comme on le voit sur la figure ci-contre, si le triangle ABC est équilatéral, soit $G = \frac{A+B+C}{3}$, le centre de gravité du triangle, les trois triangles AGC, BGC, AGB sont isométriques (images l'un d'un autre par rotation de centre G et d'angle $\pm\frac{2\pi}{3}$) et ont pour angles $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{6}$. Comme $\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$, ces trois triangles répondent à la question.



2°. Dans le triangle $AB'C$, rectangle en A, l'angle en B' vaut $\frac{\pi}{2} - \widehat{C}$. Si on considère le triangle ABB', l'angle en B' est donc $\frac{\pi}{2} - \widehat{C}$, celui en B est $\pi - \widehat{B} = \pi - \left(\frac{\pi}{2} + \widehat{C}\right)$ et les deux angleS sont égaux donc ce triangle est isocèle. Ainsi $\frac{B+B'}{2}$ est la pied de la hauteur issue de A .



3°. Notons P (respectivement: Q) l'intersection de la bissectrice intérieure (respectivement: extérieure) avec (BC) et $\alpha = \frac{\widehat{A}}{2}$. Dans le triangle ABP, l'angle en P vaut $\omega = \pi - \widehat{B} - \alpha = \pi - \widehat{B} - \frac{\pi - \widehat{B} - \widehat{C}}{2} = \frac{\pi - \widehat{B} + \widehat{C}}{2} = \frac{\pi}{4}$. Et le triangle APQ est rectangle en A donc, dans le triangle ABQ, l'angle en Q vaut $\frac{\pi}{2} - \omega = \frac{\pi}{4}$. Donc les angles des bissectrices de l'angle en A avec (BC) ont pour mesure $\frac{\pi}{4} \bmod \pi$.



4°. ◇ On a $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = \pi$ et $\widehat{C} = \widehat{B} - \frac{\pi}{2}$ donc $\widehat{B} = \frac{3\pi}{4} - \frac{\widehat{A}}{2}$ et $\widehat{C} = \frac{\pi}{4} - \frac{\widehat{A}}{2}$.

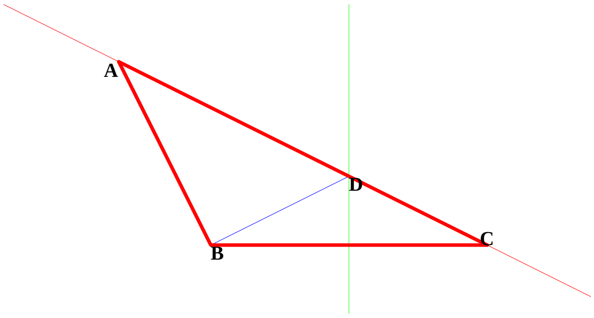
◇ Notons Ω le centre du cercle circonscrit. L'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right)$ a pour mesure $\varepsilon\,\widehat{A}$ modulo 2π avec $\varepsilon = \pm 1$ et, alors, l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega C}}\right)$ a pour mesure $2\varepsilon\,\widehat{A}$. Et on a

$$a^2 = \left\|\overrightarrow{\Omega C} - \overrightarrow{\Omega B}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{\Omega C}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{\Omega B}\right\|^2 - 2\left\|\overrightarrow{\Omega C}\right\|\left\|\overrightarrow{\Omega B}\right\| \cos\left(2\varepsilon\,\widehat{A}\right) = 2R^2 - 2R^2 \cos\left(2\widehat{A}\right) = 4R^2 \sin^2\left(\widehat{A}\right)$$

donc $a = 2R\,\sin\left(\widehat{A}\right)$ et, de même, $b = 2R\,\sin\left(\widehat{B}\right)$ et $c = 2R\,\sin\left(\widehat{C}\right)$.

◇ On a $S = \frac{1}{2}\,a\left(b\,\sin\left(\widehat{C}\right)\right)$ donc $S = 2R^2\,\sin\left(\widehat{A}\right)\,\sin\left(\widehat{B}\right)\,\sin\left(\widehat{C}\right)$.

5°. ◇ D'après [**4**], il est nécessaire que $\widehat{C} \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$ pour que la construction soit possible ($\widehat{C} = \frac{\pi}{4} - \frac{\widehat{A}}{2}$). Puisqu'on connaît $\widehat{C}$ qu'on suppose donc dans $\left]0, \frac{\pi}{4}\right[$, on peut tracer la droite passant par C qui fait l'angle $\widehat{C}$, modulo π, avec (BC). On peut aussi tracer la médiatrice du segment $[BC]$. Ces deux droites se coupent car $\widehat{C} \neq \frac{\pi}{2}$: notons D le point d'intersection. Le triangle CDB est isocèle car $DC = DB$ donc l'angle $\widehat{DBC} = \widehat{C}$ et il suffit de tracer la perpendiculaire (Δ) en B à (DB) pour obtenir le point A comme intersection de cette droite avec la droite (CD) sauf dans le cas où $\Delta \,/\!/\, (CD)$ c'est à dire sauf si $\widehat{DBC} + \frac{\pi}{2} = \pi - \widehat{C}$ soit $\widehat{C} = \frac{\pi}{4}$ ce qui est exclu.

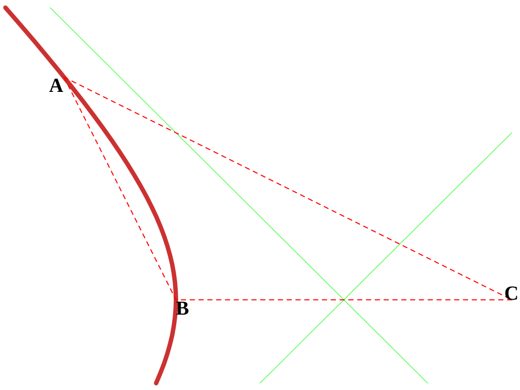


$\diamond$ Prenons un repère orthonormée avec comme origine le milieu de $[B, C]$ et comme axe des abcisses la droite (BC). La droite (AC) a pour équation $y = \varepsilon \tan \widehat{C} \left(x - \frac{a}{2}\right)$ et la droite (AB) a pour équation $y = \varepsilon \dfrac{1}{\tan \widehat{C}} \left(x + \frac{a}{2}\right)$ avec $\varepsilon = \pm 1$ suivant l'orientation choisie. Ceci donne les coordonnées de A: $x_A = \frac{a}{2} \dfrac{1 + \tan^2 \widehat{C}}{1 - \tan^2 \widehat{C}}$ et $y_A = -\varepsilon\, a \dfrac{\tan \widehat{C}}{1 - \tan^2 \widehat{C}}$ soit $x_A = \frac{a}{2} \dfrac{1}{\cos\big(2\widehat{C}\big)}$ et $y_A = -\varepsilon\, \frac{a}{2} \tan\big(2\widehat{C}\big)$. $\widehat{C}$ variant dans $\left]0, \frac{\pi}{4}\right[$ et ε dans $\{-1, 1\}$, x_A décrit $]0, +\infty[$ et y_A décrit $\mathbb{R}^*$. De plus,

$$x_a^2 = \frac{a^2}{4} \frac{1}{\cos^2\big(2\widehat{C}\big)} = \frac{a^2}{4}\left(1 + \tan^2\big(2\widehat{C}\big)\right) = \frac{a^2}{4} + y_A^2$$

donc A appartient à la courbe $(\mathcal{H})$ d'équation $x^2 - y^2 = \frac{a^2}{4}$. Or, $(\mathcal{H})$ est une hyperbole équilatére d'axe focal (BC) qui contient B et C.

A décrit la branche d'hyperbole équilatére de sommets B, C qui contient B privée de B.

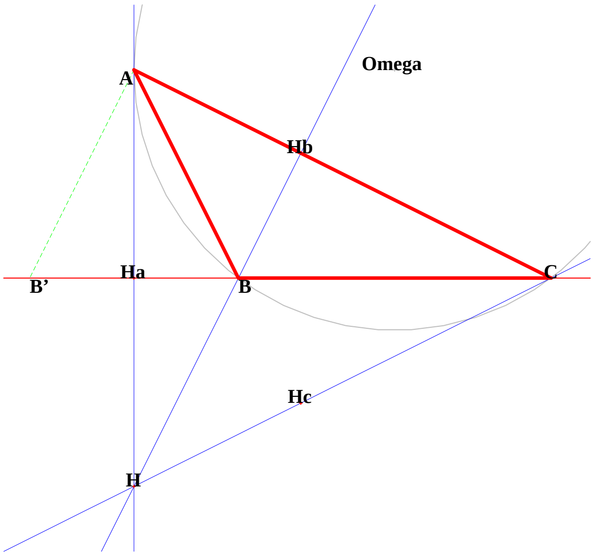


6°. Comme au [**4**], soit Ω le centre du cercle circonscrit et posons, ici, T_A la tangente en A à ce cercle et θ une mesure modulo π de l'angle orienté de droites $\big(\widehat{(AB), T_A}\big)$. Cet angle intercepte le même arc de cercle que l'angle $\big(\widehat{(CB), (CA)}\big)$ donc $\theta \equiv \big(\widehat{(CB), (CA)}\big) \equiv \varepsilon\, \widehat{C}$ modulo π. Notons K le point d'intersection de T_A avec (BC). On a donc $\widehat{BAK} = \widehat{C}$, $\widehat{ABK} = \pi - \widehat{B}$ donc $\widehat{AKB} = \pi - \left(\widehat{C} + (\pi - \widehat{B})\right) = \widehat{B} - \widehat{C} = \frac{\pi}{2}$.

Donc la tangente en A au cercle circonscrit est la hauteur issue de A. (*voir figure à la question suivante*)

7°. Notons H_A, H_B, H_C les pieds des hauteurs issues respectivement de A , B, C et H l'orthocentre. On a, avec la notation du [**2**], $(AB') \mathbin{/\!/} (BH_B) = (BH)$ car ces deux droites sont orthogonales à (AC). Les deux triangles $B'H_AA$ et BH_AH sont donc semblables et, puisque, d'après [**2**], $B'H_A = H_AB$, le rapport de similitude vaut 1 et donc $AH_A = H_AH$.

Ainsi, l'orthocentre est l'image de A par la réflexion d'axe (BC) .



8°. On a $h = b\sin\widehat{C}(= c\sin\widehat{B})$ et on a vu au [**4**], $b = 2R\sin\widehat{B}$ (et $c = 2R\sin\widehat{C}$) ce qui donne

$$h = 2R\sin\widehat{B}\,\sin\widehat{C} = R\left(\cos\big(\widehat{B}-\widehat{C}\big)-\cos\big(\widehat{B}+\widehat{C}\big)\right) = R\left(\cos\big(\widehat{B}-\widehat{C}\big)-\cos\big(\pi-\widehat{A}\big)\right) = R\left(\cos\big(\widehat{B}-\widehat{C}\big)+\cos\big(\widehat{A}\big)\right)$$

donc <u>le triangle est pseudo-rectangle si et seulement si $h = R\cos\big(\widehat{A}\big)$</u> .

* * *
* *
*