MATHÉMATIQUES

Exercice 1

Un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ est dit normalisé si le coefficient de son terme de plus haut degré est égal à 1. Si m est un entier naturel, $\mathbb{R}_m[X]$ désigne le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ engendré par les monômes $(X^k)_{0 \leqslant k \leqslant m}$.

Soit A un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ normalisé de degré 2, $A(X) = X^2 + pX + q$, $(p, q) \in \mathbb{R}^2$ tel que $A(x) > 0$ pour tout réel x. L'entier naturel n étant fixé, on lui associe l'équation différentielle :

$$(E_n) \qquad A(x)\, y'' - n\, A'(x)\, y' + n\,(n+1)\, y = 0.$$

Pour $P \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$, on pose $\quad u(P) = AP'' - n\, A'P'.$

1°. (a) Montrer que l'on définit ainsi un endomorphisme u de $\mathbb{R}_{n+1}[X]$ dont on donnera la représentation matricielle dans la base des monômes $(X^k)_{0 \leqslant k \leqslant n+1}$. Préciser les éléments diagonaux que l'on notera $\quad (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}) \quad$ **avec** $\quad \lambda_0 > \lambda_1 > \ldots > \lambda_n = \lambda_{n+1}$.

(b) Démontrer que u est diagonalisable et donner la dimension de chacun des sous–espaces propres de u.

(c) Démontrer que pour tout entier naturel k, $\quad 0 \leqslant k \leqslant n+1$, il existe un polynôme P_k, normalisé et de degré k, tel que $\quad u(P_k) = \lambda_k P_k$. Discuter l'unicité de ces polynômes P_k.

(d) En déduire que toutes les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E_n) sont des fonctions polynômes.

2°. Soit I un intervalle ouvert non vide tel que $P_n(x)$ soit différent de zéro pour tout x de I. On cherche à exprimer une fonction v, solution de l'équation (E_n), sous la forme $v = z\, P_n$

où z est une application définie sur I. Démontrer l'existence d'une telle fonction z de classe $\mathcal{C}^2$ et que z' est solution d'une équation différentielle du premier ordre que l'on résoudra.

3°. Démontrer que la fraction rationnelle $\dfrac{A^n}{P_n^2}$ est la dérivée d'une fraction rationnelle que l'on précisera.

Exercice 2

Soit C l'espace vectoriel des fonctions à valeurs réelles, 2π-périodiques, paires, continues et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$.

À tout élément f de C, on associe l'équation différentielle :

$$(E) \qquad y'' - y = f(x).$$

1°. (a) Étudier existence et unicité d'une solution y_0 sur $\mathbb{R}$ de (E) telle que $y_0(0) = 0$ et $y_0'(0) = 0$.

(b) Exprimer la solution générale sur $\mathbb{R}$ de (E) à l'aide de t, y_0, $t \mapsto \mathrm{ch}\ t$ et $t \mapsto \mathrm{sh}\ t$.

2°. (a) Vérifier que $t \mapsto y_0(-t)$ définit une solution sur $\mathbb{R}$ de (E) et en déduire que y_0 est paire.

(b) Quelles sont les solutions y sur $\mathbb{R}$ de (E) telles que $y(\pi) = y(-\pi)$?

(c) Montrer que l'équation E admet une unique solution F telle que $F'(0) = F'(\pi) = 0$.

(d) En étudiant l'application $t \mapsto F(t - 2\pi)$ démontrer que F est l'unique solution 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ de (E) et que cette solution est paire.

3°. (a) Vérifier que, pour tout réel x, $y_0(x) = \displaystyle\int_0^x \mathrm{sh}\ (x-t) f(t)\, \mathrm{d}t$ et en déduire une expression de F. (On pourra utiliser les égalités $\mathrm{sh}\ (x-t) = \mathrm{sh}\ x \,\mathrm{ch}\ t - \mathrm{ch}\ x \,\mathrm{sh}\ t$ et $\mathrm{ch}\ (x-t) = \mathrm{ch}\ x \,\mathrm{ch}\ t - \mathrm{sh}\ x \,\mathrm{sh}\ t$.)

(b) Démontrer que, en posant $F = T(f)$ l'on définit ainsi un endomorphisme continu T de l'espace vectoriel C muni de la norme N_∞ de la convergence uniforme.

4°. (a) Démontrer que f et F admettent des développements en série de Fourier de la forme :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx \qquad \text{et} \qquad F(x) = \frac{b_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \cos nx$$

ces séries trigonométriques convergeant normalement sur $\mathbb{R}$.

(b) Exprimer les coefficients b_n en fonction des coefficients a_n.

5°. Dans cette question, on choisit $f(x) = |\sin x|$.

(a) Déterminer la restriction de F à l'intervalle $[0, \pi]$ à l'aide des fonctions $\sin$, ch et sh.

(b) Calculer les coefficients a_n, puis les coefficients b_n.

(c) Donner la valeur de la somme $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{16n^4 - 1}$.

Exercice 3

On considère le plan affine euclidien E, rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Le nombre réel a strictement positif est donné.

Soit h une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telle que $h(0) = 0$. On lui associe l'application M de $\mathbb{R}^2$ dans E définie par :

$$\overrightarrow{OM(\theta, t)} = \left[a(1 - \cos\theta)\sin(\theta - t) + h(t)\right]\vec{\imath} - \left[a(1 - \cos\theta)\cos(\theta - t)\right]\vec{\jmath}.$$

Pour t réel, Ω_t désigne le point de E défini par la relation $\overrightarrow{O\Omega_t} = h(t)\,\vec{\imath}$ et γ_t désigne l'arc paramétré défini par l'application de $\mathbb{R}$ dans E définie par $\theta \mapsto M(\theta, t)$.

Enfin Γ est l'arc paramétré défini par l'application de $\mathbb{R}$ dans E définie par $t \mapsto P(t) = M(t, t)$.

1°. (a) Donner une équation polaire de γ_0 dans le repère $(O, -\vec{\jmath})$. Dessiner le support de γ_0.

(b) Plus généralement donner pour t réel une équation polaire de γ_t dans le repère $(\Omega_t, -\vec{\jmath})$. Déterminer une isométrie transformant le support de γ_0 en celui de γ_t.

2°. (a) Déterminer l'application h de telle sorte que, pour tout réel α, on ait la relation :

$$\frac{\overrightarrow{dP}}{dt}(\alpha) = \frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial\theta}(\alpha, \alpha).$$

Interpréter géométriquement cette égalité.

(b) Montrer que, dans ces conditions, si le point $Q(\alpha)$ de paramètre $\theta = \alpha$ de γ_0 est un point régulier, il en est de même pour le point $P(\alpha)$ de paramètre $t = \alpha$ de Γ. Comment déduire la tangente à Γ en P de la tangente en Q à γ_0 ?

Dans la suite, Γ désigne l'arc paramétré de E défini pour tout réel θ par :

$$\overrightarrow{OP(\theta)} = a\,(\theta - \sin\theta)\,\overrightarrow{\imath} - a\,(1-\cos\theta)\,\overrightarrow{\jmath}.$$

3°. (a) Soient respectivement σ et s des abscisses curvilignes sur γ_0 et Γ. Comparer $\dfrac{ds}{d\theta}$ et $\dfrac{d\sigma}{d\theta}$.

(b) Comparer et calculer la longueur des sous–arcs respectifs de γ_0 et de Γ définis par l'intervalle $[0, 2\pi]$.

(c) Pour $\theta \in]0, 2\pi[$, déterminer le repère de Frenet $\left(P(\theta); \overrightarrow{T}, \overrightarrow{N}\right)$ au point $P(\theta)$ de Γ. Calculer le rayon de courbure R en ce point.

(d) Soit $C(\theta)$ le point défini par la relation $\overrightarrow{P(\theta)C(\theta)} = R\,\overrightarrow{N}$. Calculer les coordonnées de $C(\theta)$ dans le repère $(O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$.

(e) Soit Γ_1 le lieu des points $C(\theta)$. Par quelle transformation affine le support de Γ_1 se déduit–il de celui de Γ ?

4°. (a) Expliciter des transformations géométriques simples laissant globalement invariant le support de Γ.

(b) Montrer que le point $P(0)$ est un point singulier de Γ. Préciser l'existence d'une tangente et la nature de la singularité.

(c) Dessiner sur une même figure le support de γ_0, le support du sous–arc de Γ défini par l'intervalle $[-\pi, 3\pi]$, ainsi que le support de γ_θ, le point $P(\theta)$ et la tangente au point de contact pour les valeurs $\theta = \pi$ et $\theta = \dfrac{3\pi}{2}$.